

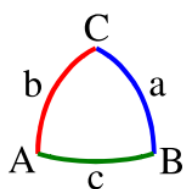
LA TRIGONOMETRIE SPHÉRIQUE - 3

Yvon Massé

Voici le troisième et dernier volet (avant un exemple d'application dans le prochain numéro) de « l'introduction à la trigonométrie sphérique » que l'auteur a bien voulu préparer à l'intention des lectrices et lecteurs de ce magazine. Un peu ardu mais passionnant et très utile !

Dans cette dernière partie nous aborderons la résolution des triangles sphériques quelconques en utilisant le minimum de relations nécessaires. Ce ne seront pas obligatoirement celles que vous retrouverez dans les anciens traités de trigonométrie, disons antérieurs aux années 1970, car avant cette époque il y avait une contrainte supplémentaire : les seuls outils de calcul précis et disponibles étaient les tables de fonctions trigonométriques et de logarithmes. Aussi le formulaire proposé était orienté vers des relations où les opérateurs entre les fonctions trigonométriques n'étaient que multiplication, division et racine carrée. Aujourd'hui où le plus simple appareil numérique permet de faire les calculs les plus complexes avec des précisions bien supérieures au besoin, cette contrainte n'a plus raison d'être.

Avant tout, rappelons qu'un triangle sphérique est déterminé par six grandeurs, trois angles aux sommets et trois côtés dont les longueurs sont aussi des angles. Toutes ces grandeurs sont comprises entre 0 et 180°. La trigonométrie sphérique démontre que pour résoudre un triangle il faut au moins connaître trois grandeurs quelconques, côté ou angle. Un petit recensement montre qu'il n'y a que 6 configurations de 3 grandeurs connues. Enfin les propriétés du triangle polaire que nous avons abordées à la partie précédente¹ permettent de regrouper ces configurations deux par deux et obtenir ainsi 3 groupes qui partagent des modes de résolution similaires. Pour chaque groupe nous détaillerons la première configuration et aborderons rapidement le formulaire de la seconde.



Commençons par la configuration où tous les côtés sont connus. Il est possible de résoudre le triangle avec un seul type de relation qui découle d'une formule importante car elle est dite **fondamentale**.

On la retrouve aussi sous l'appellation **formule du cosinus des côtés** et elle constitue un groupe de 3 relations, les voici :

$$\begin{aligned}\cos a &= \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A \\ \cos b &= \cos a \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos B \\ \cos c &= \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C\end{aligned}$$

En les remaniant elles permettent de calculer chaque angle indépendamment des autres :

$$\begin{aligned}\cos A &= \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c} \\ \cos B &= \frac{\cos b - \cos a \cdot \cos c}{\sin a \cdot \sin c} \\ \cos C &= \frac{\cos c - \cos a \cdot \cos b}{\sin a \cdot \sin b}\end{aligned}$$

Il se peut toutefois qu'avec trois valeurs de côté il ne soit pas possible de construire un triangle sphérique. C'est le cas notamment quand le troisième côté est supérieur à la somme des deux premiers. On peut le détecter dès le premier calcul de la fraction qui donne le cosinus d'un angle, que ce soit A, B ou C : le résultat est dans ce cas hors de l'intervalle -1 à 1.

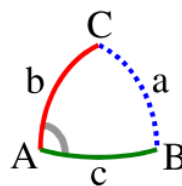
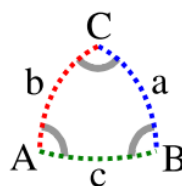
La seconde configuration où tous les angles sont connus peut se ramener à la première en considérant, comme nous l'avons indiqué en introduction, le triangle polaire du triangle à résoudre. Les équations nécessaires pour effectuer la résolution sont donc les relations duales des précédentes qui s'obtiennent en utilisant les formules de passage entre angle et côté. On obtient :

$$\begin{aligned}\cos a &= \frac{\cos A + \cos B \cdot \cos C}{\sin B \cdot \sin C} \\ \cos b &= \frac{\cos B + \cos A \cdot \cos C}{\sin A \cdot \sin C} \\ \cos c &= \frac{\cos C + \cos A \cdot \cos B}{\sin A \cdot \sin B}\end{aligned}$$

Ici encore, 3 angles donnés peuvent ne pas pouvoir constituer un triangle sphérique (par exemple : leur somme doit être supérieure à 180°). On s'en rendra compte par le calcul d'une des 3 fractions qui donnera un résultat hors de l'intervalle -1 à 1.

La troisième configuration est plus simple car il y a toujours une solution et elle est unique. C'est celle où deux côté et l'angle formé par ceux-ci sont connus, associons ces grandeurs aux lettres repères A, b et c. Nous pouvons déjà calculer le troisième côté avec la formule fondamentale :

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A$$



Ayant ainsi tous les côtés, on peut finaliser la résolution en se reportant à la première configuration, mais on peut aussi souhaiter calculer directement les angles B et C.

Il faut dans ce cas utiliser une autre formule dite **des cotangentes** ou **des quatre éléments se faisant suite**. Ces éléments sont pris dans l'ordre sur le triangle à partir d'un côté, en parcourant le triangle soit dans un sens soit dans l'autre. En numérotant les éléments de 1 à 4, la formule s'écrit :

$$\cos 2 \cdot \cos 3 = \cot 1 \cdot \sin 3 - \cot 4 \cdot \sin 2$$

et elle constitue un groupe de 6 relations. Les deux qui nous intéressent sont :

$$\cos A \cdot \cos c = \cot b \cdot \sin c - \cot B \cdot \sin A$$

$$\cos A \cdot \cos b = \cot c \cdot \sin b - \cot C \cdot \sin A$$

d'où l'on tire :

$$\cot B = \frac{\cot b \cdot \sin c - \cos A \cdot \cos c}{\sin A}$$

$$\cot C = \frac{\cot c \cdot \sin b - \cos A \cdot \cos b}{\sin A}$$

L'utilisation de la cotangente se prête bien à l'obtention des angles (ou des côtés) car ils sont compris entre 0 et 180°, ce qui correspond de façon unique à toutes les valeurs que peut prendre une cotangente. Malheureusement la fonction cotangente et son inverse sont rarement implantés dans les applications numériques ou les langages de programmation. Pour y palier, l'inversion des fractions pour utiliser les fonctions tan() et atan() présente l'inconvénient d'avoir un passage à l'infini pour 90° et de devoir effectuer un changement de quadrant pour les valeurs négatives.

La meilleure façon de s'en sortir est d'utiliser, si elle est disponible, la fonction atan2() qui prend 2 arguments. Comme dans la majorité des langages de programmation, nous considérerons que le premier argument est l'ordonnée du cercle trigonométrique, le second l'abscisse (attention, l'ordre utilisé dans les tableurs est généralement l'inverse). En réorganisant les relations ci-dessus on obtient :

$$\tan B = \frac{\sin b \cdot \sin A}{\cos b \cdot \sin c - \sin b \cdot \cos c \cdot \cos A}$$

$$\tan C = \frac{\sin c \cdot \sin A}{\cos c \cdot \sin b - \sin c \cdot \cos b \cdot \cos A}$$

Ce qui peut alors se coder, par exemple en Python au bas de cette page, et fournir ainsi directement les angles recherchés.

La quatrième configuration est celle où deux

angles B et C ainsi que le côté commun a sont connus. Ici encore les relations à utiliser sont les relations duales de la configuration précédente :

$$\cos A = -\cos B \cdot \cos C + \sin B \cdot \sin C \cdot \cos a$$

$$\cot b = \frac{\cot B \cdot \sin C + \cos a \cdot \cos C}{\sin a}$$

$$\cot c = \frac{\cot C \cdot \sin B - \cos a \cdot \cos B}{\sin a}$$

La cinquième configuration concerne le cas où deux côtés et un angle externe sont connus, ils seront désignés par a, b et A. C'est la configuration la plus complexe à résoudre car elle comprend un nombre conséquent de cas particuliers et elle aboutit à un nombre variable de solutions. Par ailleurs, elle ne permet pas d'obtenir directement un angle, la résolution se fait d'abord en calculant l'angle intermédiaire B avant de pouvoir déterminer les valeurs restantes.

Éliminons d'abord les cas particuliers quand les côtés a et b sont identiques. S'ils sont différents de 90°, il ne peut y avoir de solution que si A et a sont tous les deux ou aigus ou obtus. Si cette condition est remplie, comme le triangle est isocèle, l'angle B prend donc la valeur de A et les valeurs restantes sont données par les relations :

$$\tan \frac{c}{2} = \tan a \cdot \cos A \text{ et } \tan \frac{C}{2} = \frac{1}{\cos a \cdot \tan A}$$

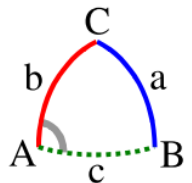
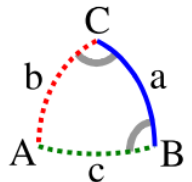
Si a et b font 90°, il n'y a de solution que si A est aussi égal à 90° et comme B doit à son tour être égal à 90°, le seul triangle possible est alors birectangle. Les angles c et C doivent donc être identiques et il y a une infinité de solution car on peut choisir ces deux angles dans l'intervalle de 0 à 180°.

Pour tous les autres cas, on s'assure d'abord qu'il soit possible d'obtenir une valeur de B par la formule des sinus², ce qui donne la condition :

$$\frac{\sin A}{\sin a} \sin b \leq 1$$

Si elle n'est pas remplie, il n'y a pas de solution. Sinon B peut prendre les deux valeurs suivantes :

$$B_1 = \arcsin\left(\frac{\sin A}{\sin a} \sin b\right) \text{ et } B_2 = 180^\circ - \arcsin\left(\frac{\sin A}{\sin a} \sin b\right)$$



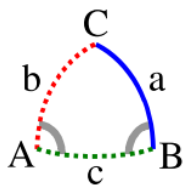
```
B = atan2(sin(b)*sin(A), cos(b)*sin(c) - sin(b)*cos(c)*cos(A))
C = atan2(sin(c)*sin(A), cos(c)*sin(b) - sin(c)*cos(b)*cos(A))
```

Il y a donc potentiellement deux solutions possibles mais c'est à la prochaine étape qu'elles seront validées, quand une des deux relations suivantes, appelées **analogies de Neper**, sera calculée avec B_1 puis B_2 :

$$\tan \frac{c}{2} = \frac{\tan \frac{a-b}{2} \cdot \sin \frac{A+B}{2}}{\sin \frac{A-B}{2}} \quad \text{et} \quad \tan \frac{C}{2} = \frac{\sin \frac{a-b}{2}}{\tan \frac{A-B}{2} \cdot \sin \frac{a+b}{2}}$$

Pour que la solution découlant de B_1 ou B_2 soit valide, il suffit que le résultat de la fraction soit positif (s'il est positif pour une fraction, il le sera pour l'autre) et on peut alors finaliser la résolution du triangle. Une dernière condition, qui relève du cas particulier, peut aussi invalider une solution : quand B_1 ou B_2 est égal à A , ce qui se produit quand a est le complément de b à 180° .

Tous les cas de figure peuvent donc se présenter : 2 solutions avec B_1 et B_2 , une seule solution avec B_1 ou B_2 , et aucune solution, c'est-à-dire qu'on ne peut pas établir de triangle sphérique avec les valeurs connues.



La sixième et dernière configuration, celle où deux angles A et B ainsi que le côté externe a sont connus, est très similaire à la cinquième car après avoir déterminé l'angle du côté b , on se retrouve avec les mêmes grandeurs que dans la seconde partie de la résolution précédente.

Considérons d'abord les cas particuliers où A et B sont égaux mais différents de 90° . Pour que le triangle puisse exister il faut que les angles A et a soient tous les deux ou aigus ou obtus. Si c'est le cas, la symétrie impose que $b = a$ et les angles restants se calculent avec les relations :

$$\tan \frac{c}{2} = \tan a \cdot \cos A \quad \text{et} \quad \tan \frac{C}{2} = \frac{1}{\cos a \cdot \tan A}$$

Si A et B sont des angles droits, le triangle ne peut exister que si $a = 90^\circ$ et par suite $b = 90^\circ$. Dans ce cas il y a une infinité de solutions avec $C = c$.

Dans le cas général, l'obtention de la grandeur du côté b dépend de la condition :

$$\frac{\sin a}{\sin A} \sin B \leq 1$$

Si elle n'est pas remplie, il n'y a pas de solution. Sinon il faut calculer les valeurs suivantes :

$$b_1 = \arcsin \left(\frac{\sin a}{\sin A} \sin B \right) \quad \text{et} \quad b_2 = 180^\circ - \arcsin \left(\frac{\sin a}{\sin A} \sin B \right)$$

puis valider les solutions qui en découlent potentiellement en remplaçant b par b_1 puis b_2 dans une des fractions suivantes. Si le résultat

est positif, la solution est valide et les valeurs de c et C peuvent être déterminées.

$$\tan \frac{c}{2} = \frac{\tan \frac{a-b}{2} \cdot \sin \frac{A+B}{2}}{\sin \frac{A-B}{2}} \quad \text{et} \quad \tan \frac{C}{2} = \frac{\sin \frac{a-b}{2}}{\tan \frac{A-B}{2} \cdot \sin \frac{a+b}{2}}$$

Enfin, si A est le complément de B à 180° , il faut aussi invalider le cas où a est égal à b_1 ou b_2 .

Proposons-nous, maintenant que le formulaire est entièrement établi, de l'appliquer à nos préoccupations gnomoniques. Auparavant nous ferons une observation qui a toute son importance dans ce passage de la théorie à la pratique. Comme nous l'avons vu, les angles comme les côtés d'un triangle sphérique sont toujours compris entre 0 et 180° , ce qui ne permet d'atteindre, en taille maximale, que la moitié d'une sphère... Et nous voulons pouvoir couvrir la sphère entière ! Pour cela, il suffit d'associer deux triangles différents et, par exemple, dans le cadre de la sphère céleste en gnomonique ce seront les deux hémisphères oriental et occidental. Pour les distinguer, les azimuts et angles horaires sont comptés négativement pour la partie orientale, positivement pour l'occidentale.

Considérons à présent le triangle de position représenté à la figure ci-dessus et gardons bien à l'esprit que, lorsque angle horaire et azimut ne sont pas connus, sa résolution dans le cadre général nécessite de considérer aussi son triangle miroir par rapport au plan du méridien. Recherchons maintenant la hauteur du Soleil en connaissant sa déclinaison, la latitude du lieu et l'angle horaire. On a donc la troisième configuration et nous recherchons le dernier coté du triangle qui s'obtient par la formule fondamentale :

$$\cos(90^\circ - h) = \cos(90^\circ - \varphi) \cdot \cos(90^\circ - \delta) + \sin(90^\circ - \varphi) \cdot \sin(90^\circ - \delta) \cdot \cos H$$

ce qui donne la relation bien connue :

$$\sin h = \sin \varphi \cdot \sin \delta + \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos H$$

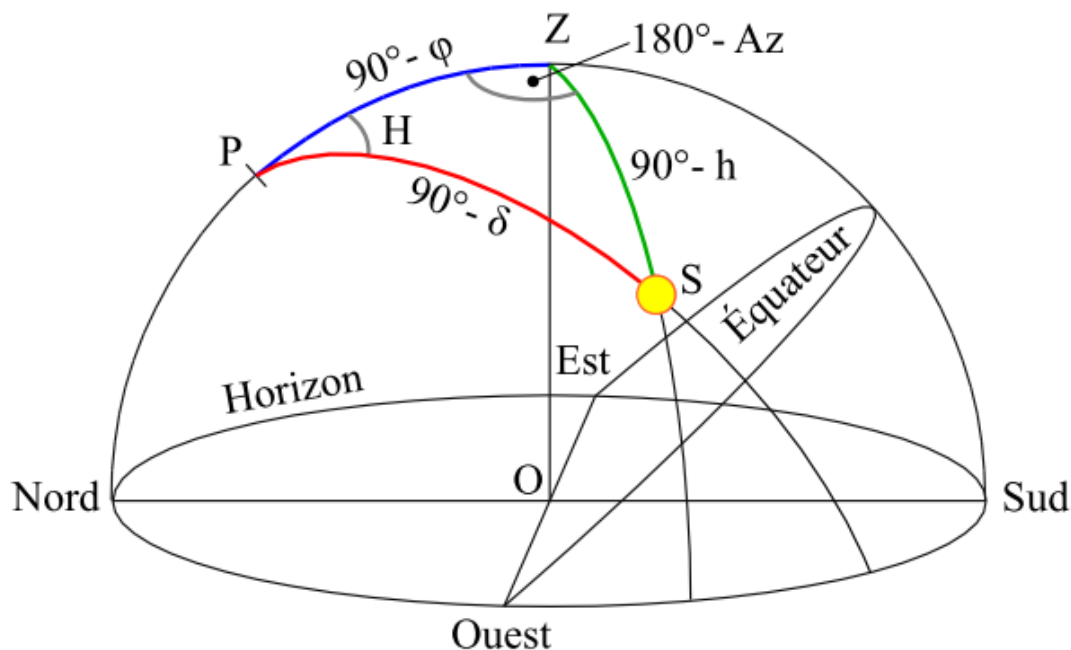
Si maintenant nous voulons calculer l'azimut Az du Soleil à partir de ces mêmes grandeurs, il faut utiliser la relation :

$$\cot(180^\circ - Az) = \frac{\cot(90^\circ - \delta) \cdot \sin(90^\circ - \varphi) - \cos H \cdot \cos(90^\circ - \varphi)}{\sin H}$$

que l'on présente souvent sous la forme :

$$\tan Az = \frac{\sin H}{\cos H \cdot \sin \varphi - \tan \delta \cdot \cos \varphi}$$

Comme nous l'avons vu précédemment, elle présente l'inconvénient d'avoir un infini quand l'azimut est de 90° , c'est-à-dire quand le Soleil est soit plein est soit plein ouest, et d'avoir à reprendre le quadrant de l'azimut quand le



résultat de la fraction est négatif.

Terminons par la recherche de l'angle horaire en connaissant l'azimut du Soleil, sa déclinaison et la latitude avec les valeurs suivantes :

$$Az = 107^\circ$$

$$\delta = 20^\circ$$

$$\varphi = 15^\circ$$

Nous avons donc la cinquième configuration et pour faciliter nos calculs, donnons dès maintenant les valeurs aux lettres repères utilisées dans le principe de la résolution :

$$a = 90^\circ - \delta = 70^\circ$$

$$b = 90^\circ - \varphi = 75^\circ$$

$$A = 180^\circ - Az = 73^\circ$$

et recherchons l'angle horaire qui est désigné par C.

N'étant pas dans le cadre des cas particuliers, il nous faut maintenant vérifier que les angles

intermédiaires B_1 et B_2 existent et calculer leurs valeurs :

$$\sin B_1 = \frac{\sin A}{\sin a} \sin b = 0,983$$

Le résultat indique que nous pouvons bien poursuivre notre investigation avec les valeurs

$B_1 = 79,42^\circ$ et $B_2 = 100,58^\circ$. Introduisons-les dans l'analogie de Neper qui détermine l'angle C.

Nous obtenons les valeurs suivantes :

$$\tan \frac{C}{2} = \frac{\sin \frac{a-b}{2}}{\tan \frac{A-B_1}{2} \cdot \sin \frac{a+b}{2}} = 0,8155$$

et

$$\tan \frac{C}{2} = \frac{\sin \frac{a-b}{2}}{\tan \frac{A-B_2}{2} \cdot \sin \frac{a+b}{2}} = 0,1863$$

Elles sont toutes les deux positives, ce qui signifie qu'il faut bien considérer les deux solutions qui correspondent respectivement à $78,39^\circ$ et $21,11^\circ$, ou encore 17 h 14 et 13 h 25. En effet, vous l'aviez peut-être déjà remarqué, les valeurs d'entrée répondent à la condition de rétrogradation de l'ombre qui a été abordée dans notre numéro 12³. C'est le constat de cette double solution qui a conduit Nunes à affirmer l'existence de ce phénomène.

Dans le prochain article, à titre d'illustration de la résolution des triangles sphériques quelconques, nous aborderons une application spécifique qui a historiquement permis de tracer des méridiennes intérieures.

Yvon Massé yvasse2@wanadoo.fr a été présenté dans le n°2 de ce magazine⁴. Il développe notamment le site <https://gnomonique.fr/> et anime le dynamique forum gnomonique qui lui est associé.

¹ https://www.cadrans-solaires.info/wp-content/uploads/2026/05/mag-CSpour-tous-n20_Y-Masse.pdf

² Voir la première partie https://www.cadrans-solaires.info/wp-content/uploads/2026/02/mag-CSpour-tous-n19_Y-Masse.pdf

³ https://www.cadrans-solaires.info/wp-content/uploads/2024/05/mag-CSpour-tous-n12_Y-Masse.pdf

⁴ https://www.cadrans-solaires.info/wp-content/uploads/2022/04/mag-CSPT-n2-Y_Masse.pdf