

ÉCLAIREMENT D'UN CADRAN SOLAIRE

Henri Gagnaire

Un peu de géométrie vectorielle, accessible au plus grand nombre, sur laquelle s'appuie l'auteur pour calculer l'éclairement d'un cadran solaire, ce qui permettra notamment à celles et ceux qui souhaitent ne faire figurer que des marques horaires utiles, de peaufiner le tracé de leur cadran solaire.

Supposons que l'on ait déterminé la déclinaison et l'inclinaison du mur sur lequel on veut installer un cadran¹. Il est important de connaître les conditions dans lesquelles le cadran sera éclairé pour ne tracer que les lignes horaires (ou les plots horaires) utiles. La méthode présentée ici est très facile à mettre en œuvre. Il est nécessaire de connaître les composantes du vecteur unitaire Σ qui est parallèle à chaque instant à la direction du Soleil et dirigé de la Terre vers le Soleil.

Pour que le cadran soit éclairé, au moins deux conditions sont nécessaires :

- le Soleil doit être levé,
- le Soleil doit être devant le cadran.

La première condition est vérifiée si la composante de Σ suivant la verticale est positive, ce qui s'écrit :

$$\Sigma_z = \sin h = \cos \delta \cos \varphi \cos H + \sin \delta \sin \varphi > 0$$

(δ est la déclinaison du Soleil, φ est la latitude du lieu, H est l'angle horaire du Soleil).

Les angles horaires correspondant au lever et au coucher de Soleil vérifient la relation :

$$\cos H_0 = -\tan \delta \tan \varphi$$

La deuxième condition est vérifiée quand la composante de Σ suivant la normale à la table du cadran est positive. Dans un précédent article², les expressions des composantes de Σ suivant le Sud (Σ_s) et l'Est (Σ_e) ont été données. Elles sont rappelées ci-dessous :

$$\begin{aligned}\Sigma_s &= \cos \delta \sin \varphi \cos H - \sin \delta \cos \varphi \\ \Sigma_e &= -\cos \delta \sin H\end{aligned}$$

Si le cadran est horizontal, la normale à celui-ci est verticale. Les deux conditions précédentes se résument à une seule ($\Sigma_z > 0$). Le cadran horizontal est éclairé dès que le Soleil est levé. Si le cadran est vertical plein Sud, il faut alors que $\Sigma_s > 0$. Cette condition est équivalente à $\cos A > 0$ où A est l'azimut du Soleil.

Quand le cadran est vertical mais déclinant d'un angle D (positif si le cadran est tourné vers l'Ouest), la composante de Σ normale au cadran (Σ_m) est donnée par :

$$\Sigma_m = \Sigma_s \cos D - \Sigma_e \sin D$$

On obtient ce résultat en écrivant les vecteurs unitaires s (dirigé vers le Sud) et e (dirigé vers l'Est) en fonction des vecteurs unitaires m (normal au cadran) et j (horizontal dirigé du côté Est) - voir figure 1.

$$\begin{aligned}s &= \cos D m + \sin D j \\ e &= -\sin D m + \cos D j\end{aligned}$$

Il faut reporter ces deux relations dans la relation $\Sigma = \Sigma_s s + \Sigma_e e + \Sigma_z z$ pour faire apparaître Σ_m et Σ_j , composante de Σ suivant j donnée par :

$$\Sigma_j = \Sigma_s \sin D + \Sigma_e \cos D$$

Le cadran vertical déclinant est donc éclairé quand Σ_m est positive. Cette condition est équivalente à $\cos(A-D) > 0$.

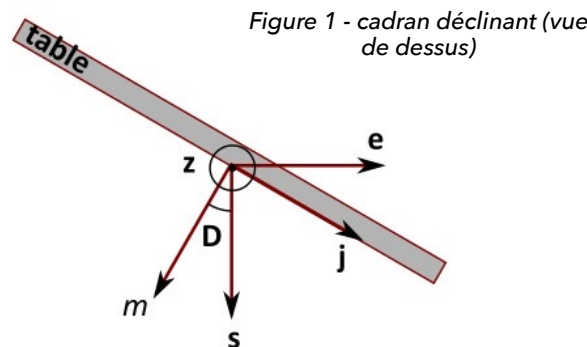
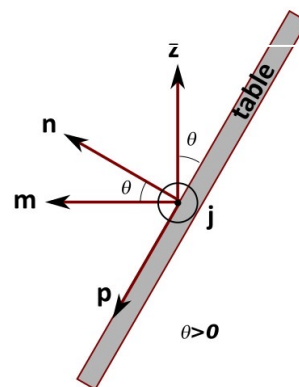


Figure 1 - cadran déclinant (vue de dessus)

Quand le cadran est déclinant et incliné, sa table est pivotée vers l'avant ou vers l'arrière par une rotation autour du vecteur unitaire j .

L'inclinaison du cadran est quantifiée par l'angle θ , nul quand le cadran est vertical et positif quand le cadran est pivoté vers l'arrière - voir figure 2.

Figure 2- cadran déclinant-incliné (vue de côté)



¹ Pour ce faire, on peut utiliser la méthode décrite dans l'article *Détermination de la déclinaison et de l'inclinaison d'un cadran* - H. Gagnaire - *Cadran info* n° 42 - https://ccs.saf-astronomie.fr/wp-content/uploads/Cadran-Info_pdf/Cadran%20Info_42.pdf (le cadran peut être de n'importe quel type, à gnomon droit, à style polaire ou même analemmatique)

² *Quelques calculs relatifs à une méridienne à chambre obscure* - H. Gagnaire - *Cadrans solaires pour tous* n° 20 - https://www.cadrans-solaires.info/wp-content/uploads/2026/05/mag-CSpour tous-n20_H-Gagnaire.pdf

Il faut maintenant écrire les composantes de Σ suivant les trois vecteurs unitaires $\mathbf{p}$ (plus grande pente), $\mathbf{j}$ et $\mathbf{n}$ (normal). On procède de la même manière que précédemment :

$$\begin{aligned}\mathbf{m} &= \cos \theta \mathbf{n} + \sin \theta \mathbf{p} \\ \mathbf{z} &= \sin \theta \mathbf{n} - \cos \theta \mathbf{p} \\ \Sigma_n &= \Sigma_m \cos \theta + \Sigma_z \sin \theta \\ \Sigma_p &= \Sigma_m \sin \theta - \Sigma_z \cos \theta\end{aligned}$$

Le cadran déclinant et incliné est éclairé quand la composante Σ_n est positive. Elle est très facile à calculer pour chaque H et chaque déclinaison du Soleil quand on connaît la déclinaison D et l'inclinaison θ du cadran (calcul de Σ_z , Σ_s et Σ_e , puis calcul de Σ_m et enfin calcul de Σ_n).

Compte tenu de ces résultats, il est très facile de tracer un diagramme qui indique quand le cadran est éclairé au cours d'une année. Pour chaque date (ou déclinaison du Soleil), on calcule pour chaque heure de la journée la valeur de Σ_z . Si celle-ci est positive (le Soleil est levé), on calcule alors la valeur de Σ_n . Si celle-ci est positive, le cadran est éclairé. Il suffit alors, dans un diagramme où les heures (solaires ou TU) sont en abscisse et les dates en ordonnée, de faire une petite croix chaque fois que le cadran est éclairé. On obtient ainsi des diagrammes tels que ceux ci-contre. Les heures de lever et de coucher de Soleil sont indiquées. L'écart entre deux dates est de 5 jours environ et les calculs ont été faits pour tous les quarts d'heure.

Le premier diagramme de la figure ci-contre montre l'éclairement d'un cadran déclinant-incliné. Pour un tel cadran à style polaire à la latitude de 45° , il faudra tracer les lignes horaires de 7h à 19h. Le deuxième diagramme correspond à un cadran septentrional. Il n'est éclairé que lorsque la déclinaison du Soleil est positive, tôt le matin et tard le soir. Le troisième diagramme est relatif à un cadran qui serait situé dans les environs de Tolède en Espagne où la latitude est suffisamment faible pour qu'un choix correct de la déclinaison Ouest du cadran conduise à un éclairement constant d'environ 9h toute l'année.

La méthode qui vient d'être décrite présente un autre (petit) avantage. En effet, la composante Σ_n n'est autre que le cosinus de l'angle entre la normale au cadran et la direction du Soleil. De sa valeur dépend la quantité d'énergie que 1 m^2 de panneau solaire reçoit de la part du Soleil. Faisons l'hypothèse (totalement fautive) que le Soleil envoie sur la Terre toujours le même flux d'énergie, été comme hiver. On peut comparer les sommes de toutes les valeurs de Σ_n pendant une saison ou pendant l'année toute entière, calculées pour différentes inclinaisons du panneau.

Il est alors possible d'avoir une idée de la meilleure inclinaison de ce panneau selon différents critères (chauffage de la maison en hiver, chauffage de la piscine en été ...) - voir tableau 1.

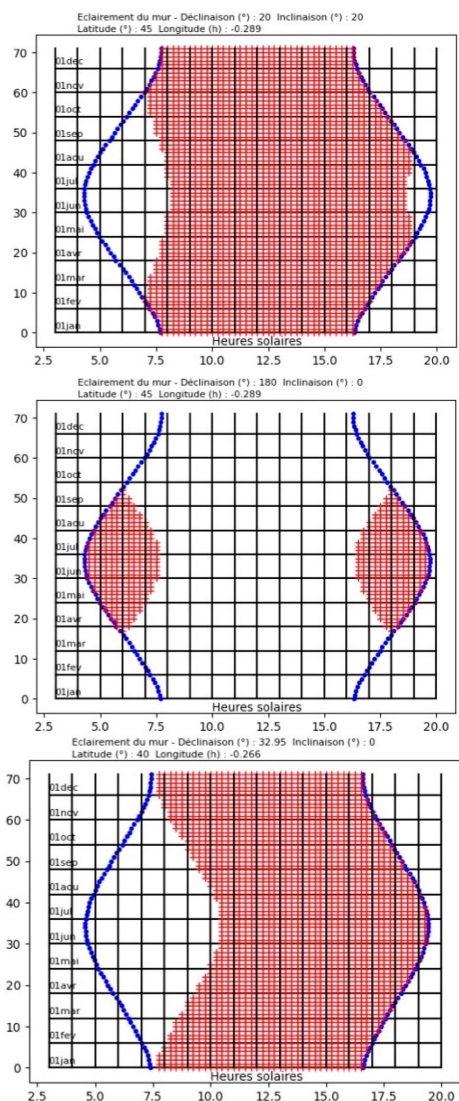


Tableau 1
Latitude : $45,4^\circ$ - déclinaison du mur : 10° - somme des Σ_n

Inclinaison (°)	Hiver	Printemps	Été	Automne	Total
0 (vertical)	462	227	258	474	1422
10	499	309	336	505	1649
20	521	384	406	520	1832
30	527	451	467	520	1964
40	517	505	514	504	2040
45	506	528	533	490	2056
50	491	546	548	473	2058
60	450	573	566	427	2016
70	396	584	569	369	1917
80	329	580	556	299	1764
90 (horizontal)	253	562	530	220	1564

Professeur de physique à l'université de Saint-Étienne, Henri Gagnaire henrigagnaire@gmail.com a découvert et s'est passionné pour la gnomonique après sa retraite. Il contribue aujourd'hui activement aux activités de l'association Recherche Midi 42* et à la diffusion des connaissances dans le domaine.

* <https://sites.google.com/view/cherche-midi-42>