

QUELQUES CALCULS RELATIFS À UNE MÉRIDienne À CHAMBRE OBSCURE

Henri Gagnaire

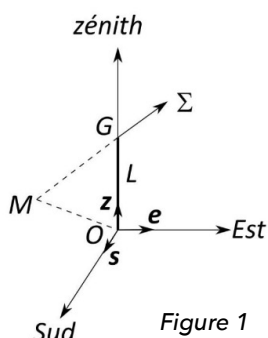
Perinaldo est un petit village italien, près d'Imperia, qui vaut réellement le détour si vous traversez la Ligurie, non seulement pour la beauté du site mais aussi pour la célèbre méridienne du sanctuaire de N.D. de la Visitation, qui a inspiré à l'auteur des calculs qu'il partage aujourd'hui.

Dans un des premiers numéros de *Cadran Solaires pour Tous*, Roger Torrenti a décrit le principe d'une méridienne à chambre obscure¹. La dernière réalisation de ce type est sans doute la méridienne du sanctuaire de N.D. de la Visitation à Perinaldo, village natal de G.D. Cassini. Elle a commencé en 2002 pour s'achever en 2007. R. Anselmi a déjà écrit un article concernant cette méridienne² et il s'est intéressé principalement à la forme et à la dimension du spot lumineux projeté sur le sol. Plus récemment, en 2021, a paru un petit livret dont l'auteur G. Bonini est un des principaux acteurs de cette réalisation³. Dans ce petit livret sont décrits les différents problèmes qui ont été rencontrés et en particulier, on y trouve la valeur des vitesses de croisement du spot avec la ligne méridienne aux solstices et à l'équinoxe.

Le but de cet article est de montrer comment on peut déterminer ces valeurs. Pour ce faire, il est d'abord nécessaire de calculer à chaque instant et à chaque date la position de l'ombre de l'extrémité d'un gnomon droit (ou du spot lumineux produit par l'œilleton de la méridienne et projeté sur le sol). On pourra éventuellement faire tracer par un ordinateur les lignes horaires et les arcs diurnes d'un cadran horizontal à style droit.

La figure 1 montre un gnomon vertical OG de longueur L (G est l'œilleton de la méridienne et O la projection verticale de l'œilleton sur le sol). Le point M est l'ombre de l'extrémité G du gnomon (ou le spot lumineux de la méridienne). On peut écrire que le vecteur **OM** est la somme des vecteurs **OG** et **GM**. Le vecteur **OG** est égal à $L \cdot \mathbf{z}$ où \mathbf{z} est le vecteur unitaire (de longueur 1) dirigé vers le zénith.

Le vecteur **GM**, lui, est égal à $-GM \cdot \Sigma$ où GM est la longueur du vecteur **GM**, inconnue pour l'instant, et Σ le vecteur unitaire dans la direction Terre-Soleil.



NB : pour des raisons typographiques les vecteurs sont écrits en gras

Ce vecteur unitaire peut être écrit en fonction de vecteurs unitaires \mathbf{s} (dirigé vers le Sud), \mathbf{e} (dirigé vers l'Est) et \mathbf{z} :

$$\Sigma = \Sigma_s \mathbf{s} + \Sigma_e \mathbf{e} + \Sigma_z \mathbf{z}$$

Les expressions des composantes de Σ , Σ_s suivant le sud, Σ_e suivant l'est et verticale Σ_z en fonction de la latitude φ du lieu, de la déclinaison δ du Soleil et de l'angle horaire H sont justifiées dans l'encart ci-après.

En définitive on peut écrire :

$$\mathbf{OM} = L \mathbf{z} - GM (\Sigma_s \mathbf{s} + \Sigma_e \mathbf{e} + \Sigma_z \mathbf{z})$$

$$\text{ou } \mathbf{OM} = -GM \Sigma_s \mathbf{s} - GM \Sigma_e \mathbf{e} + (L - GM \Sigma_z) \mathbf{z}$$

Le vecteur **OM** appartenant au plan horizontal n'a pas de composante suivant le vecteur \mathbf{z} . On peut en déduire l'expression de la longueur GM et les coordonnées du point M suivant les axes dirigés respectivement vers le Nord ($-\mathbf{s}$) et vers l'Est (\mathbf{e}) :

$$GM = \frac{L}{\Sigma_z} \text{ et } \mathbf{OM} = -L \frac{\Sigma_s}{\Sigma_z} \mathbf{s} - L \frac{\Sigma_e}{\Sigma_z} \mathbf{e} = X \mathbf{e} + Y (-\mathbf{s})$$

Compte-tenu des expressions des composantes de Σ , on obtient en définitive :

$$X = L \frac{\sin H}{\cos H \cos \varphi + \tan \delta \sin \varphi}$$

$$Y = L \frac{\cos H \sin \varphi - \tan \delta \cos \varphi}{\cos H \cos \varphi + \tan \delta \sin \varphi}$$

On peut connaître la vitesse de déplacement du spot lumineux au cours d'une journée (la déclinaison δ du Soleil est fixée) en dérivant X et Y par rapport à l'angle horaire H.

Ce qui nous intéresse, c'est la vitesse de croisement du spot (suivant la direction Ouest-Est) avec la ligne méridienne pour laquelle l'angle horaire est nul.

Il faut donc calculer la dérivée de X par rapport à H (mathématiquement, il s'agit d'une dérivée partielle car X dépend de plusieurs variables). Le calcul conduit à :

$$\frac{\partial X}{\partial H} = L \frac{\cos \varphi + \cos H \tan \delta \sin \varphi}{(\cos H \cos \varphi + \tan \delta \sin \varphi)^2}$$

À midi solaire ($H = 0^\circ$, $\cos H = 1$), on obtient :

$$\frac{\partial X}{\partial H} = L \frac{1}{\cos \varphi + \tan \delta \sin \varphi}$$

Cette expression montre que la vitesse de déplacement du spot diminue du solstice d'hiver ($\delta < 0$) au solstice d'été ($\delta > 0$). On peut calculer les valeurs de cette dérivée. La latitude de Perinaldo est $\varphi = 43,862^\circ$ (donc $\sin \varphi = 0,693$ et $\cos \varphi = 0,721$). Dans l'église de la Visitation, il y a une marche. Pour le solstice d'hiver et l'équinoxe (le spot se projette dans la nef de l'église), la hauteur de l'œilleton au-dessus du sol est $L = 8\,139$ mm tandis qu'elle ne vaut que $7\,659$ mm pour le solstice d'été (le spot se projette près de l'autel). L'unité d'angle horaire est le radian. La dérivée s'exprime donc en mm par radian ($\text{mm}\cdot\text{rad}^{-1}$). Si on veut obtenir la vitesse de déplacement du spot en mm par seconde ($\text{mm}\cdot\text{s}^{-1}$), il faut multiplier le résultat par le coefficient $2\pi / (24 \times 3600)$ puisque un tour complet de la Terre (2π radians) correspond à 24 h (24×3600 s).

On peut détailler le calcul pour le solstice d'hiver ($\delta = -23,4^\circ$), la valeur de la dérivée est $19\,327,4$ $\text{mm}\cdot\text{rad}^{-1}$ ce qui, multiplié par le coefficient, donne une vitesse de $1,405$ $\text{mm}\cdot\text{s}^{-1}$, tout à fait en accord avec celle indiquée dans le livret de G. Bonini. Pour l'équinoxe et le solstice d'été, les vitesses sont respectivement égales à $0,82$ $\text{mm}\cdot\text{s}^{-1}$ et $0,55$ $\text{mm}\cdot\text{s}^{-1}$.

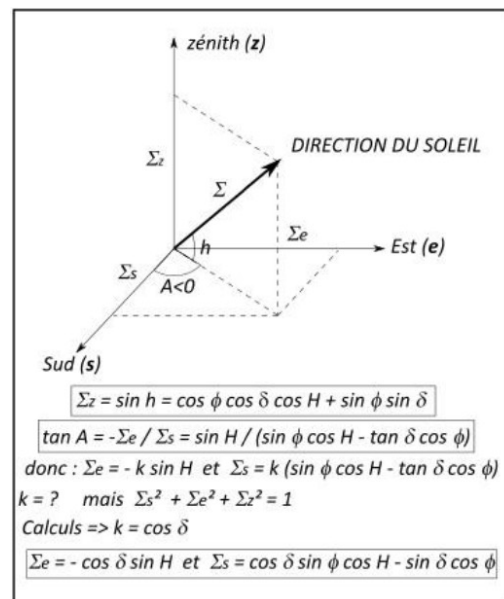
On peut également calculer le déplacement d'un jour à l'autre du spot le long de la méridienne. Le livret de G. Bonini indique un déplacement de 108 mm par jour autour de l'équinoxe. La variation de la déclinaison du Soleil d'un jour à l'autre autour des équinoxes est la plus grande qui soit mais elle est suffisamment faible ($0,4^\circ$ soit $7 \cdot 10^{-3}$ rad par jour) pour que l'on puisse encore utiliser le calcul différentiel. Néanmoins, il apparaîtra plus naturel à certains de calculer deux valeurs de Y à midi solaire ($H = 0^\circ$), l'une pour $\delta = 0^\circ$, l'autre pour $\delta = 0,4^\circ$. Les deux valeurs sont respectivement $7\,823$ mm et $7\,714$ mm soit un déplacement calculé de 109 mm.

Les expressions établies dans cet article peuvent être utilisées pour n'importe quelle date de l'année et pour n'importe quelle méridienne pourvu que l'on connaisse la latitude du lieu et la hauteur de l'œilleton au-dessus du sol.

COMPOSANTES DU VECTEUR Σ

La figure ci-dessous montre la direction du Soleil (vecteur unitaire Σ) dans le repère local. Dans le plan horizontal sont tracés les vecteurs unitaires s suivant le Sud et e suivant l'Est. Le vecteur z est dans la direction du zénith. La hauteur h et l'azimut A du Soleil sont également représentés. À partir des formules donnant le sinus de la hauteur et la tangente de l'azimut, on peut très facilement retrouver les expressions des composantes du vecteur Σ .

Nota bene : en fait pour déterminer les composantes du vecteur Σ , il faudrait revenir aux définitions de la déclinaison du Soleil, de son angle horaire etc. Une fois connues les expressions de ces composantes, on peut en déduire les formules donnant le sinus de la hauteur et la tangente de l'azimut. Ici, on « raisonne à l'envers ».



Tâche lumineuse du Soleil aux équinoxes sur le plancher du sanctuaire de N.D. de la Visitation à Perinaldo

Professeur de physique à l'université de Saint-Étienne, Henri Gagnaire henrigagnaire@gmail.com a découvert et s'est passionné pour la gnomonique après sa retraite. Il contribue aujourd'hui activement aux activités de l'association [Cherche Midi 42](https://sites.google.com/view/cherche-midi-42) <https://sites.google.com/view/cherche-midi-42> et à la diffusion des connaissances dans le domaine.

¹ https://www.cadrans-solaires.info/wp-content/uploads/2022/04/mag-CSPT-n3-R_Torrenti.pdf

² La méridienne de Perinaldo - Riccardo Anselmi - Cadran Info n°19 - mai 2009 - pp 4-9

³ Le gnomon du méridien Cassini - La méridienne à chambre obscure du sanctuaire de N.D. de la Visitation à Perinaldo - Giancarlo Bonini (traduit par Jean-François Consigli) - avril 2021 - ISBN 9782322229574