

# LA TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE - 2

Yvon Massé

Dans son premier article consacré à la trigonométrie sphérique<sup>1</sup>, l'auteur avait défini un triangle sphérique à partir de trois points : les sommets A, B et C. Il définit ici un second triangle à partir de ces mêmes points : le triangle polaire du triangle ABC, introduisant la notion de pôle.

Les pôles d'un grand cercle sont les deux points d'intersection de son axe (la droite qui lui est perpendiculaire et qui passe par son centre) avec la sphère. Ainsi, par exemple, les pôles du grand cercle de l'horizon sont le zénith et le nadir.

Pour obtenir le triangle polaire nous allons utiliser, pour chaque grand cercle du triangle initial, par exemple le côté passant par A et B, le pôle qui se trouve du côté du troisième point, soit C dans notre exemple, et nous l'appellerons C'.

On obtient ainsi les points A', B' et C' qui sont les trois sommets du triangle polaire. Ses côtés seront appelés a', b' et c' suivant le même principe que pour le triangle initial : les éléments opposés sont désignés par la même lettre. Le document annexe<sup>2</sup> permet de montrer à partir de deux figures que nous avons les six relations :

$$\begin{aligned} a' &= 180^\circ - A ; b' = 180^\circ - B ; c' = 180^\circ - C \\ A' &= 180^\circ - a ; B' = 180^\circ - b ; C' = 180^\circ - c \end{aligned}$$

Elles se résument ainsi : les côtés et sommets du triangle polaire correspondent respectivement au complément à  $180^\circ$  des sommets et côtés (notez bien l'inversion) du triangle d'origine.

Il n'est pas vraiment important de se représenter le triangle polaire car, nous le verrons plus loin, son principal intérêt réside dans les six relations qui en découlent. En effet, dès qu'on peut établir une formule propre à un triangle sphérique, elle est aussi valable pour son triangle polaire. En insérant les relations dans cette formule, on obtient alors une nouvelle formule, appelée *duale*, sans aucun effort !

Les traités de trigonométrie sphérique signalent aussi que le triangle polaire du triangle polaire est le triangle d'origine. Nous comprendrons qu'on a fait le tour de la question et que la manne des formules duales est épuisée.

Intéressons-nous à présent à la résolution d'un triangle particulier, le triangle rectangle qui, comme en trigonométrie plane, comporte un sommet à angle droit. Dans le cadre de la trigonométrie sphérique, il faut toutefois

préciser « un seul sommet à angle droit » car il peut y en avoir deux (triangle *birectangle*)... voire trois (triangle *trirectangle*) !

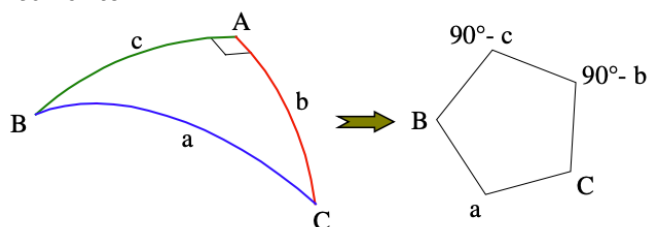
Considérons le cas de deux angles droits : les deux grands cercles qui sont perpendiculaires au troisième passent donc par le pôle de ce dernier. Ce pôle constitue donc le troisième sommet du triangle et les deux côtés qui l'encadrent font  $90^\circ$ .

Sur les six éléments du triangle, il n'en reste donc plus que deux à déterminer, le côté entre les angles droits et le sommet qui lui est opposé.

Il est assez simple de constater que leurs angles sont identiques : la résolution de ce type de triangle est donc des plus faciles. De plus, ces deux derniers éléments peuvent être de  $90^\circ$ , ce qui nous donne l'unique configuration du triangle à trois angles droits avec trois côtés qui font aussi  $90^\circ$ .

Quant au triangle sphérique à un seul angle droit, il existe un moyen mnémotechnique astucieux appelé *pentagone de Neper* qui permet de retrouver toutes les formules nécessaires pour calculer un angle, côté ou sommet, quand on en connaît deux, en plus de l'angle droit que l'on nomme généralement A.

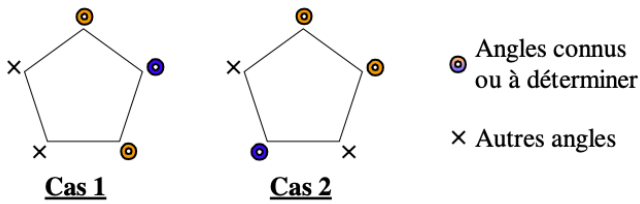
Le principe consiste à dessiner un pentagone aux sommets duquel on écrit dans l'ordre les cinq angles autres que l'angle droit. Il faut, en plus, compléter à  $90^\circ$  les angles des deux côtés de l'angle droit, comme sur la figure suivante :



En parcourant le pentagone, il n'y a que deux distributions possibles pour trois angles - deux connus et un à trouver -, à partir d'un groupe d'au moins deux angles.

Oui, oui !... Essayez, vous n'en trouverez pas d'autre.

Elles sont représentées à la figure suivante :



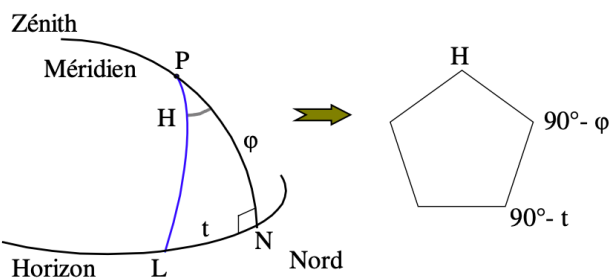
Dans les deux cas, on prend le cosinus de l'angle du milieu, celui qui est représenté en bleu, et on déclare qu'il est égal :

- Pour le cas 1 : au produit des cotangentes des deux autres angles dits adjacents.
- Pour le cas 2 : au produit des sinus des deux autres angles dits opposés.

Prenons l'exemple d'un cadran horizontal de l'hémisphère nord et recherchons l'angle tabulaire  $t$  correspondant à l'angle horaire  $H$  en fonction de la latitude  $\varphi$ .

Reportons le problème sur la sphère céleste : aux plans de l'horizon et du méridien correspondent les deux grands cercles de la figure suivante qui se coupent à angle droit en deux points, nous ne nous intéresserons qu'au point  $N$  situé au nord.

Le prolongement du style correspond au pôle nord  $P$ , dont la hauteur au dessus de l'horizon est  $\varphi$ . Enfin, au demi-plan d'ombre sous le style correspond un grand cercle qui fait l'angle  $H$  avec le méridien, il coupe l'horizon au point  $L$ , prolongement de la ligne horaire correspondante. L'angle tabulaire  $t$  correspond donc à l'arc  $LN$ , un des côtés du triangle rectangle  $PLN$ .



La disposition des angles concernés sur le pentagone correspondant au cas 1, on peut donc écrire :

$$\cos(90^\circ - \varphi) = \cot H \cdot \cot(90^\circ - t)$$

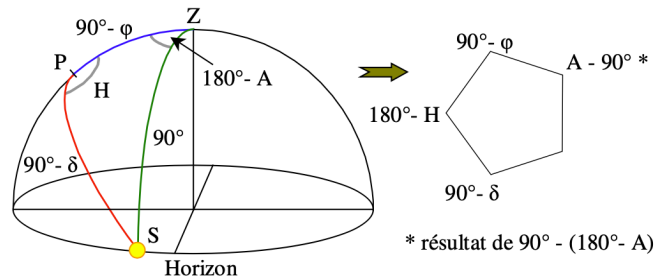
ce qui permet de retrouver la formule bien connue :

$$\tan t = \sin \varphi \cdot \tan H$$

Prenons un second exemple : la configuration au coucher du Soleil. Dessinons à la figure suivante le triangle de position à cet instant. On peut constater qu'il n'y a aucun angle droit mais que la particularité est plutôt du côté de l'arc  $ZS$  qui fait  $90^\circ$ , ce qui constitue un triangle appelé *rectilatère*.

Remarquons que son triangle polaire est rectangle et nous avons tous les outils pour résoudre le triangle de position, notamment trouver l'angle horaire et l'azimut du Soleil connaissant la latitude et la déclinaison.

Pour les triangles rectilatères, il existe aussi un moyen mnémotechnique pratiquement identique à celui du pentagone de Neper, l'unique différence est que l'angle du sommet opposé au côté à  $90^\circ$  (dans notre exemple l'angle horaire  $H$ ) doit être complété à  $180^\circ$ , ce qui donne la disposition suivante autour du pentagone :



On peut donc écrire pour obtenir l'angle horaire (cas 1) :

$$\begin{aligned} \cos(180^\circ - H) &= \cot(90^\circ - \delta) \cdot \cot(90^\circ - \varphi) \\ \cos H &= -\tan \delta \cdot \tan \varphi \end{aligned}$$

C'est la relation bien connue que l'on obtient facilement à partir de la formule de hauteur. Concernant l'azimut on a (cas 2) :

$$\begin{aligned} \cos(90^\circ - \delta) &= \sin(90^\circ - \varphi) \cdot \sin(A - 90^\circ) \\ \cos A &= -\sin \delta / \cos \varphi \end{aligned}$$

relation qui, cette fois, est plus difficile à obtenir avec le formulaire classique de la gnomonique.

Dans le prochain article nous aborderons les triangles sphériques quelconques, leurs formules et la façon de les résoudre.

Yvon Massé [yvasse2@wanadoo.fr](mailto:yvasse2@wanadoo.fr) a été présenté dans le n°2 de ce magazine<sup>3</sup>. Il développe notamment le site <https://gnomonique.fr/> et anime le dynamique forum gnomonique qui lui est associé.

<sup>1</sup> <https://www.cadrans-solaires.info/wp-content/uploads/2026/02/maq-CSpour-tous-n19-Y-Masse.pdf>

<sup>2</sup> <https://gnomonique.fr/divers/tripol.pdf>

<sup>3</sup> <https://www.cadrans-solaires.info/wp-content/uploads/2022/04/maq-CSPT-n2-Y-Masse.pdf>