Longueur de l'ombre sur un cadran incliné déclinant

José Luis Tetuán

Les études gnomoniques ont souvent recours à la trigonométrie sphérique mais la géométrie analytique vectorielle permet aussi de résoudre des problèmes gnomoniques ardus, ce que démontre ici l'auteur, avec le calcul de la longueur de l'ombre d'un cadran incliné déclinant.

Soit :

- le Soleil, supposé réduit à son centre, situé à une position de la sphère céleste locale définie par le vecteur unitaire $\vec{s}$,
- le plan du cadran défini par son vecteur normal unitaire $\vec{n}$,
- le point Q, extrémité du style droit $\overline{BQ}$ ou du style polaire $\overline{CQ}$.

Le point O, sur le cadran, est le centre de deux systèmes de coordonnées que l'on va énoncer ci-après. Ce point sera le point B ou le point C selon que l'on considère l'ombre du style droit ou celle du style polaire. ϕ est la latitude du lieu. P est le point d'ombre du point Q. Il s'agit de déterminer la distance OP. On suppose que la réfraction de l'atmosphère est négligeable.

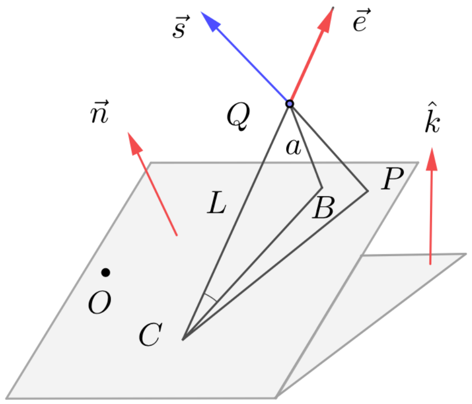


Figure 1 : Vecteurs dans le cadran

1 - Systèmes de référence

On utilise, d'une part, le *système équatorial*, où le vecteur unitaire $\vec{e}$ = (0, 0, 1) pointe toujours vers le pôle Nord, et le vecteur $\vec{s}$ = (cos δ sin H, cos δ cos H, sin δ), vers le Soleil.

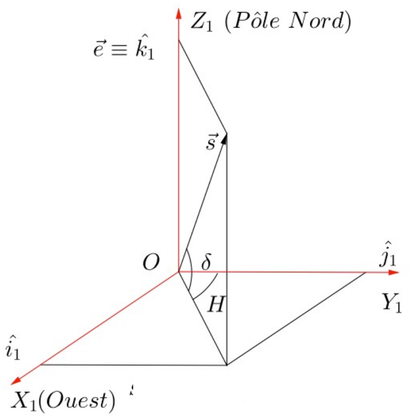


Figure 2 : Système équatorial

D'autre part, on utilise le *système horizontal* avec le vecteur vertical $\vec{k}$ = (0,0,1) et dont l'expression du vecteur normal au cadran est donnée par :

$\vec{n}$ = (sin I sin D, sin I cos D, cos I) (1)

où I et D sont l'inclinaison et la déclinaison du cadran.

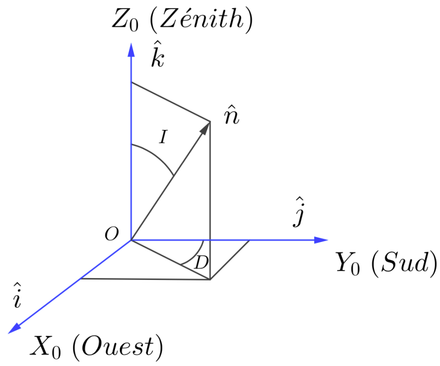


Figure 3 : Système horizontal

Exprimons alors les vecteurs $\vec{e}$ et $\vec{s}$ en coordonnées horizontales, en tenant compte de la figure 4.

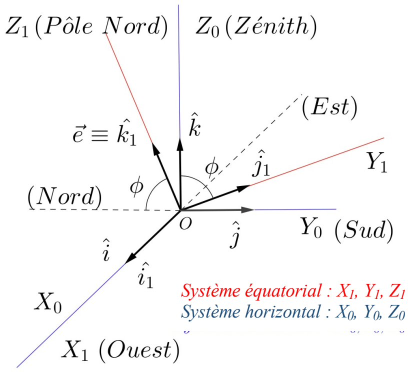


Figure 4 : Changement d'axes

On obtient alors :

$\vec{e}$ = (0, -cos ϕ, sin ϕ) (2)

et

$\vec{s}$ = (cos δ sin H, sin ϕ cos δ cos H − cos ϕ sin δ, cos ϕ cos δ cos H + sin ϕ sin δ) (3)

2 – Le point d'ombre

Le point P est l'intersection, avec le cadran, de la droite qui passe par Q et dont la direction est celle du vecteur $\vec{s}$. Ainsi, le point recherché obéit à la solution d'un système d'équations, qui représente l'intersection de la droite avec le plan de vecteur caractéristique $\vec{n}$ et qui passe par l'origine O.

Ce système d'équations est :

$$\begin{cases} \vec{X} = \vec{Q} + \lambda \vec{s} \\ \vec{X} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases}$$

où $\vec{X} = \overrightarrow{OX}$ et $\vec{Q} = \overrightarrow{OQ}$.

En multipliant scalairement la première équation par le vecteur $\vec{n}$ et en tenant compte de la seconde, on obtient :

$\vec{X} \cdot \vec{n} = 0 = \vec{Q} \cdot \vec{n} + \lambda \vec{s} \cdot \vec{n}$

et en éliminant la valeur de $\lambda = -\dfrac{\vec{Q} \cdot \vec{n}}{\vec{s} \cdot \vec{n}}$

Donc : $\overrightarrow{OP} = \vec{P} = \vec{Q} - \dfrac{\vec{Q} \cdot \vec{n}}{\vec{s} \cdot \vec{n}} \vec{s}$ (4)

dont nous connaissons, en coordonnées horizontales, les vecteurs $\vec{Q}$, $\vec{s}$ et $\vec{n}$.

Pour que le point d'ombre se produise, deux conditions doivent être satisfaites : le Soleil doit être au-dessus de l'horizon, et au-dessus du cadran. Mathématiquement, ces deux conditions s'expriment respectivement par les inégalités $\vec{s} \cdot \vec{k} > 0$ et $\vec{s} \cdot \vec{n} > 0$.

Quand il s'agit de l'ombre du style droit, on situe l'origine de coordonnées au pied B, et alors, a est la hauteur du style, $\vec{Q} = a\,\vec{n}$.

Quand il s'agit de l'ombre du style polaire, on situe l'origine au centre C, et alors $\vec{Q} = L\vec{e}$ si $\vec{Q}$ a le sens du vecteur $\vec{e}$, ou $\vec{Q} = -L\vec{e}$ sinon. On peut écrire, en tout cas, $\vec{Q} = sign\,(\vec{e}\,.\,\vec{n})\,L\vec{e}$, où L est la longueur du style polaire.

3 – L'ombre du style

La longueur d de l'ombre du style est la norme du vecteur $\overrightarrow{OP}$ trouvé en (4), et est donnée par :

$$d = \|\overrightarrow{OP}\| = \sqrt{\vec{P}\,.\,\vec{P}} \qquad (5)$$

On observe qu'il n'a pas été nécessaire de définir un système d'axes dans le cadran pour déterminer les coordonnées du point d'ombre qui s'y trouve. Cela s'explique par le fait que la norme d'un vecteur est un invariant par changement de repère ; il a donc suffi de calculer la longueur de l'ombre dans le système horizontal établi.

4 – Exemples

Pour un cadran avec $\phi = 36°$, $I = 30°$, $D = 20°$, on obtient, à partir des équations (1) et (2) :

$$\begin{cases} \vec{n} = (0.17101, 0.46985, 0.86603) \\ \vec{e} = (0, -0.80902, 0.58779) \end{cases}$$

Avec un style droit de longueur a = 10 cm :

$$\vec{Q} = (1.71010, 4.69847, 8.66025)$$

De l'équation (3) on obtient pour $H = -60°$ et $\delta = -20°$:

$$\vec{s} = (-0.81380, 0.55287, 0.17908)$$

On constate que :

$$\vec{s} \cdot \vec{k} = 0.17908 > 0 \text{ et } \vec{s} \cdot \vec{n} = 0.27568 > 0.$$

Le point d'ombre en coordonnées horizontales est donné par l'équation (4) :

$$\vec{P} = (31.22943, -15.35605, 2.16441)$$

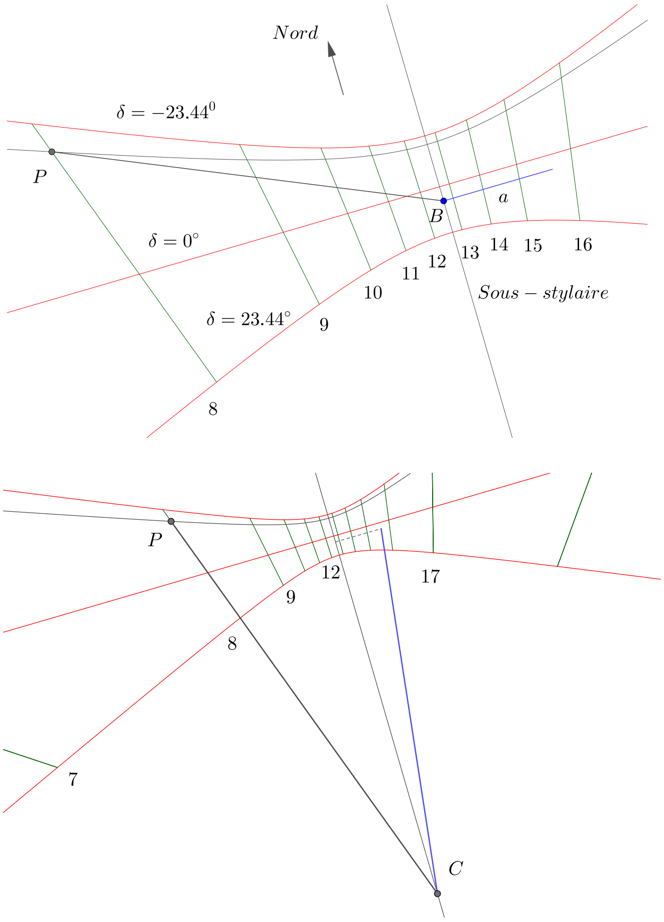
et de l'équation (5) on déduit la longueur d de l'ombre du style droit : 34,87 cm.

Pour le même cadran mais pourvu d'un style polaire de longueur L = 20 cm et pour les mêmes coordonnées célestes H et δ qu'auparavant, on a :

$$Q = (0, -16.18034, 11.75571)$$

$$P = (7.61146, -21.35133, 10.08077)$$

et la longueur de l'ombre du style polaire qui en résulte est d = 24,81 cm.



Les deux cadrans, avec l'ombre du style droit (en haut) et celle du style polaire (en bas). Les styles ont été rabattus (en bleu) sur le cadran selon la sous-stylaire. Les ombres respectives sont BP et CP.

José Luis Tetuán jltetuan@telefonica.net vit dans la province de Cádiz. Ingénieur aéronautique de formation, il est, depuis sa retraite, passionné par les mathématiques des cadrans solaires et vient de publier l'ouvrage *Introducción a la gnomónica vectorial* (Introduction à la gnomonique vectorielle).