

LA TRIGONOMETRIE SPHERIQUE

Yvon Massé

On se réfère souvent, en gnomonique, à la sphère céleste locale et vous avez été logiquement tenté de recourir à la trigonométrie sphérique dans vos problèmes gnomoniques mais ne la maîtrisez pas bien ? Yvon Massé se propose, avec une série d'articles dont voici le premier, de vous familiariser avec elle.

Au cours de mes pérégrinations dans le monde de la gnomonique, j'ai eu l'occasion d'utiliser différents outils mathématiques pour finalement me rendre compte que la trigonométrie sphérique était celui qui était le plus apte à me donner une solution aux divers problèmes que je me posais.

Toutefois, lors de différents échanges avec d'autres « bricoleurs » de gnomonique, je me suis rendu compte que l'utilisation de la trigonométrie sphérique était rarement privilégiée, voire totalement ignorée. Pour expliquer cette divergence, il m'a semblé que, dans l'approche de cet outil mathématique, il devait manquer un « maillon » entre le monde sensible de l'environnement d'un cadran et la trigonométrie sphérique qui, comme son nom l'indique, se conçoit sur la surface d'une sphère. C'est pourquoi ce *maillon* fera l'objet principal de ce premier article.

Nous avons l'habitude de concevoir l'espace en trois dimensions : longueur, largeur et hauteur. Dans cet espace, nous concevons facilement les notions de droite, de plan et d'angle qui sont les éléments principaux de la géométrie dite euclidienne. Nous savons, de plus, résoudre un triangle plan par la trigonométrie, ce qui peut sembler suffisant pour se débrouiller avec les problématiques qui se posent dans l'espace euclidien. Alors pourquoi s'embêter avec une surface sphérique dont nous n'avons, par ailleurs, aucune idée de la position et de la grandeur ? Dans un premier temps, élucidons ces deux derniers points.

La sphère qui est principalement utilisée en gnomonique (comme d'ailleurs en astronomie) est la sphère céleste et, de plus, nous considérons que l'espace dans lequel nous évoluons est concentré dans l'unique point du centre de la sphère. Cela revient à dire que la sphère est supposée infiniment grande et que notre environnement est, en proportion, si petit qu'il se réduit en un simple point.

Toutefois, sans que cela soit contradictoire, on donne au rayon de cette sphère la valeur unité, comme pour le cercle trigonométrique utilisé

pour introduire les fonctions du même nom : sinus, cosinus, etc.

Voyons maintenant comment nous allons transposer les éléments de notre environnement sur cette sphère.

Commençons par les demi-droites parallèles qui ont la même direction. Comme notre environnement est considéré ponctuel, elles se confondent en une seule demi-droite et, en la prolongeant jusqu'à la sphère nous obtenons un point.

Ce sera notre première transposition :

Environnement du cadran (géométrie euclidienne)	Sphère céleste (géométrie sphérique)
Demi-droites parallèles (direction)	Point unique

Nous savons aussi que deux directions, si elles n'ont pas le même sens, définissent un ensemble de plans parallèles qui, en trigonométrie sphérique, se concentrent en un unique plan. Si on l'étend jusqu'à la sphère, l'intersection donne un cercle qui partage la sphère en deux parties égales.

Cette dernière particularité n'est pas anodine car on peut aussi tracer sur une sphère des cercles qui n'ont pas cette spécificité, comme par exemple les cercles de même latitude sur la sphère terrestre. Pour les dissocier, on appelle *grand cercle* tous les cercles qui partagent la sphère en deux parties égales et *petit cercle* tous les autres cercles.

Voici donc notre seconde et dernière transposition :

Environnement du cadran (géométrie euclidienne)	Sphère céleste (géométrie sphérique)
Plans parallèles	Unique grand cercle

De ce que nous venons de voir, nous pouvons aussi déduire cette importante propriété : sur la sphère (ou en géométrie sphérique), par deux points passe un unique grand cercle.

Tiens, tiens ! Ça ne vous rappelle rien ?

