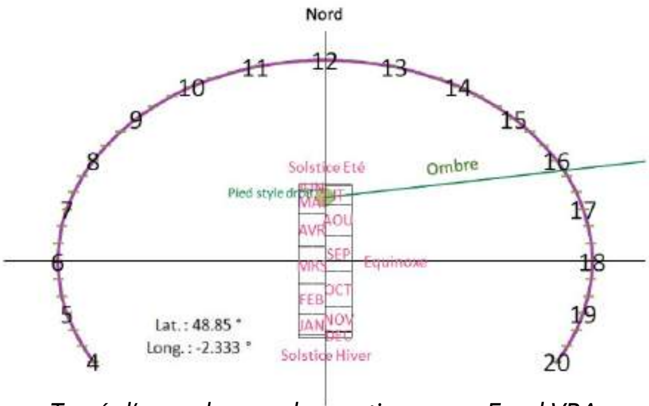
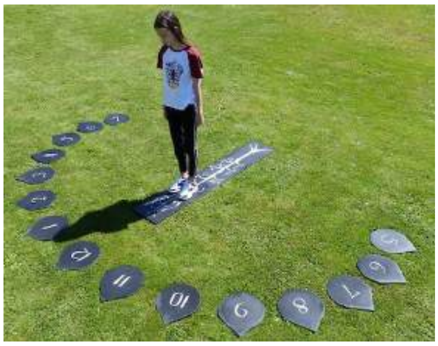
FORMULES D'UN CADRAN ANALEMMATIQUE HORIZONTAL

Pierre-Louis Cambefort

L'ombre d'un gnomon (ou d'une personne jouant le rôle du gnomon) indique, sur un cadran analemmatique, l'azimut du Soleil mais également l'heure solaire, à condition de placer correctement le gnomon sur une échelle de date. L'auteur invite les gnomonistes à le démontrer, par le calcul…



Tracé d'un cadran analemmatique avec Excel VBA



Cadran analemmatique réalisé par Jean-Roch Moreau

Un cadran analemmatique horizontal est la projection d'un cadran équatorial sur l'horizon du lieu. Il s'agit d'une projection orthographique, perpendiculaire à l'horizon, projection dont le centre est rejeté à l'infini. La particularité de tels cadrans est qu'ils nécessitent le déplacement du gnomon selon la date, donc la déclinaison du Soleil. Ce que nous allons démontrer.

Soit (Fig. 1) la sphère céleste de centre O et de rayon R, pour une latitude φ, avec l'horizon NESW et l'équateur céleste F_1WG_1E. Choisissons le Soleil S' à l'équinoxe, donc sur l'équateur céleste pour un angle horaire H et un azimut Az. La course du Soleil S' au cours de la journée se projette en une ellipse FEGW de centre O, de demi-grand axe R et de demi-petit axe R . sin φ. Le Soleil se projette en C sur l'ellipse et en A sur le plan méridien (l'angle H se retrouve entre OS' et OA). Les points C et A se projettent en D sur l'axe NS.

$$AS' = CD = R \cdot \sin H$$

$$OD = OA \cdot \cos(90-\varphi) = OA \cdot \sin\varphi$$

$$OD = OS' \cdot \cos H \cdot \sin\varphi = R \cdot \cos H \cdot \sin\varphi$$

$$\tan Az = CD / OD \text{ ou encore}$$
$$\tan Az = R \cdot \sin H / (R \cdot \cos H \cdot \sin\varphi)$$

$$\text{soit } \tan Az = \tan H / \sin\varphi$$

Soit un gnomon vertical suivant OZ. L'ombre du gnomon coupe l'ellipse en C1, qui marque l'heure correspondant à H sur l'ellipse à l'équinoxe.

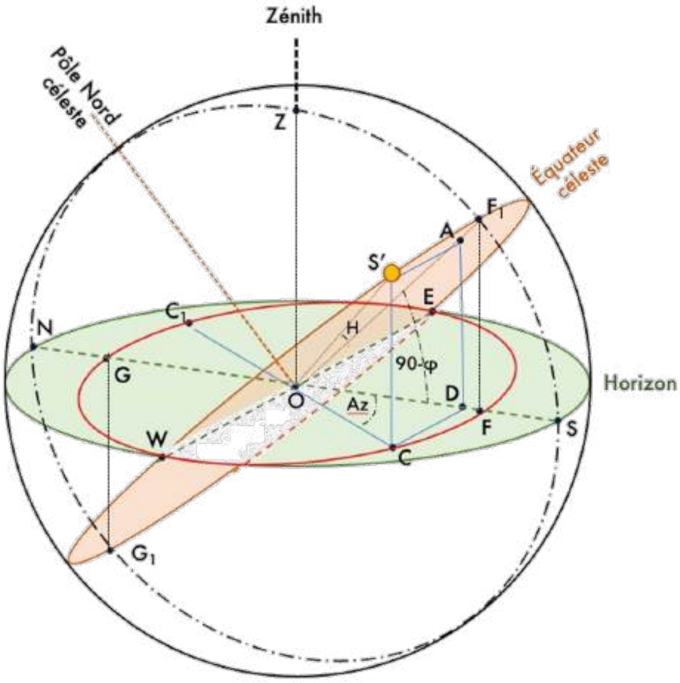


Fig. 1

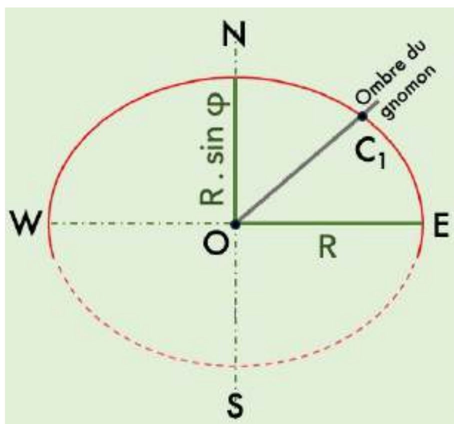


Fig. 2 - Vue depuis le zénith

Soit maintenant (Fig. 3) le Soleil S'_1 avec le même angle horaire H mais une déclinaison δ (sur le schéma : δ>0) et un azimut Az_1. Un plan vertical passant par S'_1 coupera l'ellipse en V et V1, ce qui ne sera plus en concordance avec l'heure H déterminée à la Fig. 1. Il faudra donc que le gnomon en O soit déplacé en K pour que son ombre passe à nouveau par le point C_1 pour donner l'heure H. Le Soleil étant très éloigné de notre cadran, l'ombre KC1 du gnomon est parallèle à VV1.

Soit α l'angle entre l'azimut Az du soleil S' et l'azimut Az_1 du soleil S'_1 :

$$\alpha = \widehat{VOC} = \widehat{V_1OC_1} = \widehat{KC_1O} = Az_1 - Az$$

Dans le triangle plat OKC_1, appliquons la loi des sinus[1] :

$$OK / \sin \alpha = OC_1 / \sin(180 - Az_1) = OC / \sin Az_1$$

$$\text{or } OC \,.\, \sin Az = CD = R \,.\, \sin H$$

$$\text{donc } OC = R \,.\, \sin H / \sin Az$$

$$\text{D'autre part } OK = OC \,.\, \sin \alpha / \sin Az_1$$

$$\text{ou } OK = R \,.\, \sin H \,.\, \sin \alpha \;/ (\sin Az_1 \,.\, \sin Az)$$

$$\text{et } \sin \alpha / \sin Az_1 = \sin(Az_1 - Az) / \sin Az_1$$

$$= (\sin Az_1 \,.\, \cos Az - \sin Az \,.\, \cos Az_1) / \sin Az_1$$

$$\text{Donc } \sin \alpha / \sin Az_1 = \cos Az - \sin Az / \tan Az_1$$

Enfin,

$$OK = R \,.\, \sin H \,.\, (\cos Az - \sin Az / \tan Az_1) / \sin Az$$

$$\text{donc } OK = R \,.\, \sin H \,.\, (1 / \tan Az - 1 / \tan Az_1)$$

$$\text{Ou, puisque } \tan Az = \tan H / \sin \varphi$$

$$OK = R \,.\, \sin H \,.\, (\sin \varphi / \tan H - 1 / \tan Az_1)$$

Nous savons par ailleurs (formule donnant l'azimut) que :

$$\tan Az_1 = \sin H / (\sin \varphi \,.\, \cos H - \cos \varphi \,.\, \tan \delta)$$

Ce qui permet d'écrire, après simplifications :

$$OK = R \,.\, \cos \varphi \,.\, \tan \delta$$

Cette valeur de OK est constante pour une déclinaison donnée, indépendante de l'angle horaire H, donc quelle que soit l'heure solaire correspondante. Il suffit donc de déplacer le gnomon au point K correspondant à la date donnée pour lire l'heure solaire sur l'ellipse représentée sur la Fig. 2, correspondant à la projection de la course du Soleil pour δ = 0.

Nota : la déclinaison est supposée constante au cours de la journée, une hypothèse largement suffisante pour un cadran analemmatique horizontal.

[1] https://fr.wikipedia.org/wiki/Loi_des_sinus

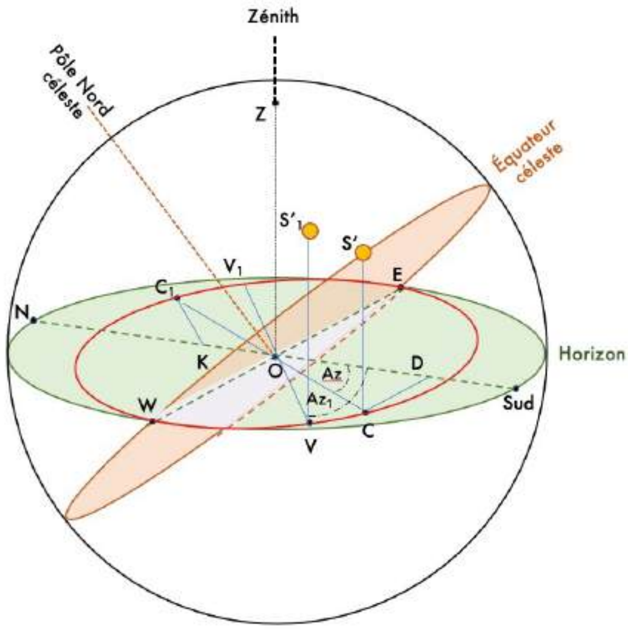


Fig. 3

TRACÉ DU CADRAN

Tracé de l'ellipse

Les valeurs à porter sur le cadran analemmatique sont donc celles de la projection de l'équateur uniquement. En prenant l'axe des Y suivant la méridienne et l'axe des X suivant la direction est-ouest :

$$X = CD = R \,.\, \sin H \quad \text{et} \quad Y = OD = R \,.\, \cos H \,.\, \sin \varphi$$

(valeurs symétriques pour le matin et pour le soir, à gauche de la méridienne pour les valeurs du matin, en regardant le nord).

Échelle des dates

Elle est située sur la courbe méridienne définie par ses ordonnées $Y = R \,.\, \cos \varphi \,.\, \tan \delta$, avec les déclinaisons positives vers le nord, comprises entre +/- ε (obliquité de l'écliptique).

Choix de R

R peut être choisi arbitrairement, mais le style doit avoir une longueur suffisante pour que l'ombre atteigne le point horaire midi au solstice d'été et doit donc avoir une longueur minimale L :

Donc $L \,.\, (\sin \varphi - \cos \varphi \,.\, \tan \varepsilon) / (\cos \varphi + \sin \varphi \,.\, \tan \varepsilon)$ (formule de l'ombre d'un cadran horizontal pour midi) doit être supérieure à $R \,.\, (\sin \varphi - \cos \varphi \,.\, \tan \varepsilon)$

$$\text{Qui s'écrit encore } L > R \,.\, \cos(\varphi - \varepsilon) / \cos \varepsilon$$

Si l'on choisit R égal à 3 mètres à Paris, il faudra un gnomon de longueur de presque 3 mètres, donc une personne levant les bras.

Indication des heures

Le cadran analemmatique horizontal indique les heures solaires vraies. Pour indiquer les heures légales, on pourrait remplacer l'échelle des dates par une courbe en huit et placer le gnomon sur cette courbe, mais cela ne serait valable que pour le midi moyen local et donnerait des informations fausses pour les autres heures.

Pierre-Louis Cambefort est ingénieur, artiste et gnomoniste (pierre-louis.cambefort@orange.fr). Un portrait détaillé lui a été consacré dans le numéro 1 du magazine