

LES CADRANS À STYLE PROFILÉ Yvon Massé

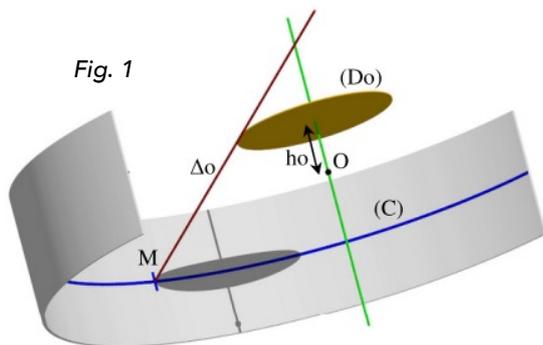
Dans un précédent article¹, l'auteur avait retracé l'histoire des cadrans équatoriaux de temps moyen et présenté en conclusion l'ingénieux cadran à style profilé de Martin Bernhardt. Il nous invite ici à mieux comprendre comment calculer un tel style.

Cadran à style profilé de Martin Bernhardt (Kaiserslautern, Allemagne)



Voyons maintenant comment on peut définir la forme du style profilé d'un cadran de type Bernhardt afin d'obtenir de façon rigoureuse une lecture du cadran directement en temps légal.

La figure 1 représente un cadran équatorial simplifié éclairé par le Soleil à midi heure légale le 15 avril, date où l'équation du temps est nulle. L'axe polaire est représenté en vert. L'échelle horaire, tracée en bleu, est un arc de cercle (C) situé dans le plan équatorial et dont le centre est sur l'axe polaire, en O. Elle ne comporte pour l'instant que la graduation de midi légal M située à l'extrémité de l'ombre d'un disque (Do) centré sur l'axe polaire et perpendiculaire à celui-ci. La ligne Δo représente le rayon solaire qui tangente le bord du disque et se termine sur la graduation de midi.



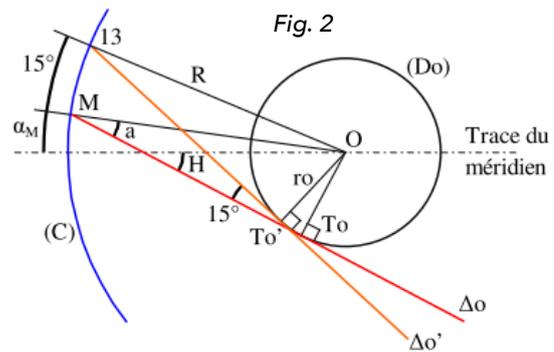
Plaçons-nous à la figure 2 dans le plan de l'équateur, en le regardant du côté nord. Nous représenterons sur ce plan tous les éléments du cadran simplifié pour définir, dans un premier temps, l'échelle horaire. L'axe polaire est perpendiculaire à la figure et passe par le point O d'où on peut tirer la trace du plan méridien qui nous servira de référence. O est le centre de l'échelle horaire (C) de rayon R. Le rayon du

Soleil Δo tangente le disque porte-ombre (Do), qui est physiquement au-dessus de la figure, en To. Il fait avec la trace du méridien l'angle horaire H = λr - λ, λ étant la longitude du cadran, positive à l'ouest, et λr la longitude du méridien de référence (en Europe -15° pour l'heure d'hiver et -30° pour l'heure d'été). Le disque porte-ombre est vu depuis M suivant l'angle a qui est un des paramètres du cadran, son rayon ro est égal à R · sin a. Le point M sur (C) fait donc l'angle α_M = H - a = λr - λ - a par rapport au plan méridien. Si on souhaite utiliser l'autre côté de l'ombre, il faut prendre α_M égal à λr - λ + a.

Pour généraliser, nous donnerons une valeur algébrique au paramètre angulaire a en le considérant positif quand on utilise le côté gauche de l'ombre (avec le pôle Nord vers le haut) et négatif pour le côté droit. La seule relation à utiliser est ainsi :

$$\alpha_M = \lambda r - \lambda - a$$

M est du côté est du cadran quand α_M est positif.



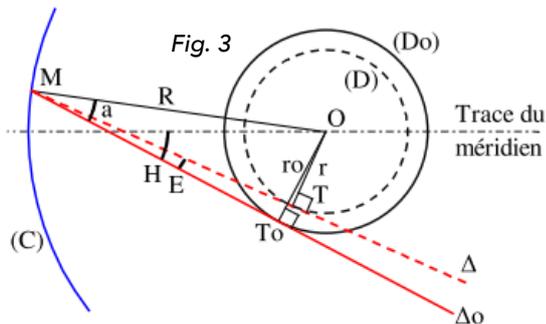
Quant aux autres graduations horaires, comme celle de 13 h légale qui se trouve à l'extrémité du rayon solaire Δo' faisant l'angle de 15° avec Δo, il suffit de remarquer que le point de tangence To' sur le disque porte-ombre suit la variation de l'angle horaire. On peut ainsi retrouver l'ensemble du triangle OToM tourné de 15°, ce qui signifie que la graduation horaire est régulière de part et d'autre de M à raison de 15° par heure.

Il nous reste à déterminer la distance ho du disque (Do) au point O sur l'axe polaire (voir Fig.

¹ https://www.cadrans-solaires.info/wp-content/uploads/2025/05/maq-CSpourtous-n16_Y-Masse.pdf

1). Le rayon Δo , qui se termine en M, est incliné sur le plan de la figure de l'angle δ correspondant à la déclinaison du Soleil au 15 avril, d'où $h_o = MTo \cdot \tan \delta = R \cdot \cos a \cdot \tan \delta$

Pour conserver la même graduation horaire à une autre date que le 15 avril, il nous faut maintenant prendre en compte l'équation du temps à laquelle on peut associer l'angle E qui vient modifier l'angle H et permet de représenter sur la figure 3 le rayon solaire Δ à midi légal.



Pour toutes les dates différentes du 15 avril, les relations qui définissent la position et le rayon du disque deviennent ainsi :

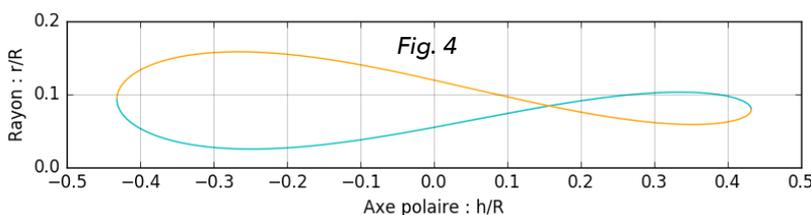
$$r = |R \cdot \sin(a - E)|$$

$$h = MT \cdot \tan \delta = R \cdot \cos(a - E) \cdot \tan \delta$$

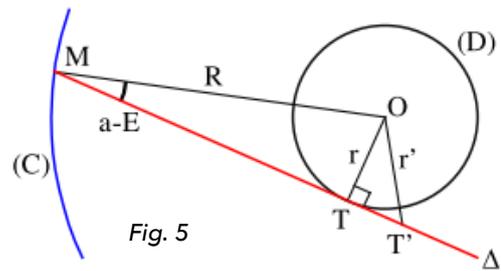
La valeur absolue de la première formule provient de la convention que nous avons adoptée pour le paramètre a qui peut être négatif.

Si maintenant, pour chaque jour compris entre deux solstices successifs, nous « empilons » sur l'axe polaire les disques aux dimensions et positions ainsi définies, nous obtenons deux styles, un pour l'hiver et le printemps, l'autre pour l'été et l'automne. Ce sont, en fait, des volumes de révolution, c'est-à-dire usinable sur un tour, qui permettent en principe de lire directement l'heure légale sur le cadran (sans toutefois prendre en compte le changement d'heure saisonnier). La figure 4 donne le rayon de ces styles le long de l'axe polaire, ou profil, pour un angle $a = 5^\circ$, en bleu clair pour l'hiver et le printemps, en orange pour l'été et l'automne.

La vérification qu'il faut maintenant faire est de s'assurer que, dans tous les cas, le rayon Δ n'est pas intercepté par un autre disque le long de son trajet, c'est-à-dire avant ou après avoir tangenté son propre disque. Pour cela, nous devons évaluer la relation entre les distances h'

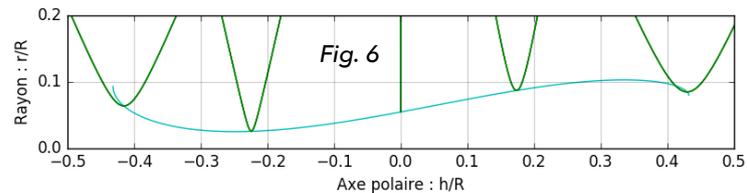


et r' correspondant à tous les points T' de Δ aux alentours du point de tangence T. Cette relation s'obtient facilement en remarquant, figure 5, que la distance $h' - h$ est égale à $TT' \cdot \tan \delta$, d'où $r'^2 = TT'^2 + r^2 = (h' - h)^2 / \tan^2 \delta + r^2$



La courbe correspondante à cette relation sur le graphique du profil, qui peut aussi représenter r' en fonction de h' , est une branche d'hyperbole dont le minimum est le point de coordonnées (h, r) qui appartient au profil du style. Pour tous les points (h, r) , les branches d'hyperbole passent aussi systématiquement par le point $(0, R)$ qui correspond à la trace de l'échelle horaire (C).

Représentons à la figure 6, en vert, quelques branches d'hyperbole avec le profil hiver-printemps pour effectuer notre vérification. Elles ont été tracées de gauche à droite pour les dates du 5 janvier, 15 février, 20 mars, 15 avril et 15 juin.



Les trois branches centrales (celle du 20 mars dégénère en une demi-droite) n'ont pratiquement qu'un seul point d'intersection avec la courbe du profil, ce qui signifie que le rayon solaire Δ correspondant n'est pas entravé et que l'ombre du style indique correctement l'heure légale. Ce n'est malheureusement pas le cas des deux autres branches qui correspondent à des dates proches des solstices. Elles « entrent » dans le profil du style ce qui signifie que ce n'est pas la partie prévue qui portera ombre et, en conséquence, que l'heure indiquée sera entachée d'erreur.

Nous verrons toutefois dans un prochain article que ces branches d'hyperbole sont en réalité un puissant outil qui nous permettra de modifier légèrement le profil des styles afin d'améliorer, hélas partiellement, la lecture du temps légal aux environs des solstices.

Yvon Massé yvasse2@wanadoo.fr a été présenté dans le n°2 de ce magazine. Il développe notamment le site <https://gnomonique.fr/> et anime le dynamique forum gnomonique qui lui est associé.