LONGUEUR DE L'OMBRE D'UN CADRAN HORIZONTAL

Pierre-Louis Cambefort

Lorsqu'un problème est difficile à résoudre en simple géométrie plane, les gnomonistes font logiquement appel à la géométrie sphérique, pas si complexe à utiliser en fait. L'auteur nous le démontre ici avec la détermination de la longueur de l'ombre d'un cadran solaire horizontal…

Soit (figure 1) la sphère céleste de centre O et de rayon R pris égal à 1, d'axe du monde OP, incliné de la latitude φ sur l'horizon, d'axe vertical ZON contenant le zénith. Le plan méridien coupe le plan horizontal passant par N (nadir) en la droite KN, K étant l'intersection de ce plan avec la ligne des pôles. Le plan du cadran horizontal est représenté par ce plan horizontal passant par N, avec un gnomon vertical ON et un style polaire OK de longueur l (le style polaire, parallèle à l'axe du monde étant incliné de l'angle φ sur le plan horizontal). Soit S1 la position du Soleil, de déclinaison δ, à midi (angle horaire nul).

Soit S la position du Soleil, de même déclinaison δ et d'angle horaire H. Le plan contenant le Soleil S et l'axe du monde PO, qui fait avec le plan méridien l'angle horaire H, coupe le plan du cadran suivant la droite KB. Les plans contenant le Soleil S et la verticale OZ d'une part et l'axe du monde OP d'autre part, contiennent le rayon SO qui coupe le plan du cadran en B. La ligne KB représente la ligne horaire du Soleil de déclinaison δ et d'angle horaire H.

Rappelons que la projection gnomonique est la projection de la sphère céleste à partir du centre de cette sphère. Voir la figure 2.

L'intersection de l'équateur céleste avec le plan du cadran est une droite perpendiculaire à la droite méridienne KN : c'est l'équinoxiale. Le diamètre de l'équateur céleste contenu dans le plan méridien coupe cette équinoxiale au point E : OE est perpendiculaire à l'équinoxiale.

Le plan défini par le diamètre de l'équateur céleste contenu dans le plan du Soleil d'une part, et l'axe des pôles d'autre part coupe cette équinoxiale au point C. Les angles DOE et BOC sont égaux et valent la déclinaison δ du Soleil (que nous supposerons constante durant la journée).

En ne retenant que les droites qui nous intéressent, nous obtenons la figure 3.

Le style polaire, parallèle à l'axe du monde, est perpendiculaire au plan de l'équateur céleste, donc à toutes les droites contenues dans ce plan et en particulier aux droites OE et OC.

L'angle COE représente l'angle horaire H.

Nous pouvons écrire OE = OC * cos H mais aussi OE = l * tan φ donc OC = l * tan φ /cos H.

Comme d'autre part EC = OC * sin H nous pouvons écrire EC = (l * tan φ /cos H) * sin H ou encore EC = l * tan φ * tan H.

Notons ψ l'angle OKB entre le style polaire et la ligne horaire du Soleil. On peut écrire :

tan ψ = OC / KO = (l * tan φ /cos H) / l
Soit OC / KO = tan φ / cos H

Dans le triangle OKB, l'angle OBK est égal à :

180 – OKB - (90-δ) = 90 - (ψ-δ)
et sin OBK / l - sin (90-δ) / KB
D'où KB = l * cos(δ) / cos(ψ-δ)

KB est la longueur de l'ombre correspondant à la déclinaison du Soleil δ et à l'angle horaire H.

Dans le triangle KCE, on peut écrire :

EC / KE = tan H1= (l * tan φ * tan H) / (l / cos φ)
Soit tan H1 = sin φ* tan H

C'est la formule classique de l'angle tabulaire d'un cadran horizontal.

Le point B de l'arc diurne est donc défini par la quantité KB, portée sur la ligne horaire H1. Ses coordonnées sont donc :

X = KB * sin H1
Y = KB * cos H1

En conclusion, la longueur de l'ombre est donc égale à :

KB = l * cos δ / cos (ψ-δ)
avec tan ψ = tan φ /cos H

La longueur de l'ombre est la plus courte à midi (heure solaire vraie). Sa longueur est à cet instant :

KB = l * cos δ /cos (φ-δ)

Si on se place en région parisienne (latitude de 48,85 °), nous obtenons au solstice de juin : 1,016 * l. La longueur de l'ombre à midi vrai au solstice d'été en région parisienne est donc peu différente de la longueur du style polaire.

NB : dans ses calculs, l'auteur a utilisé deux formules classiques de la géométrie plane : la somme des angles d'un triangle est égale à 180° et sin A / a = sin B / b = sin C / c

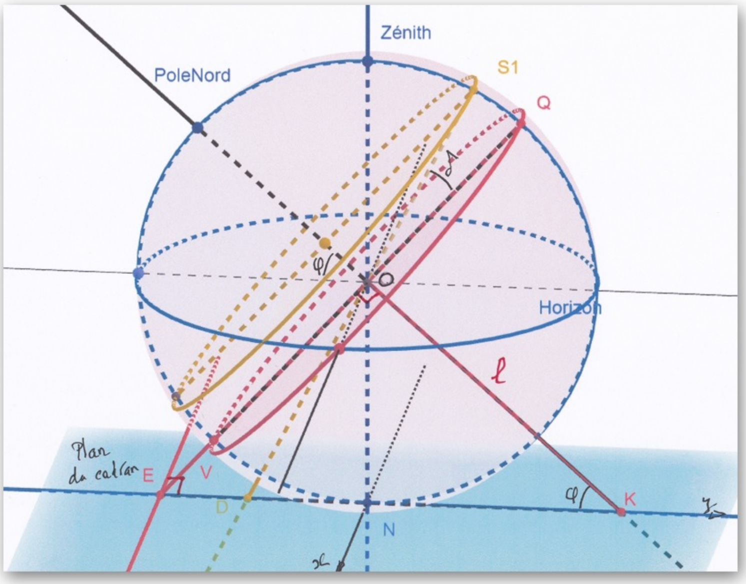


Figure 1

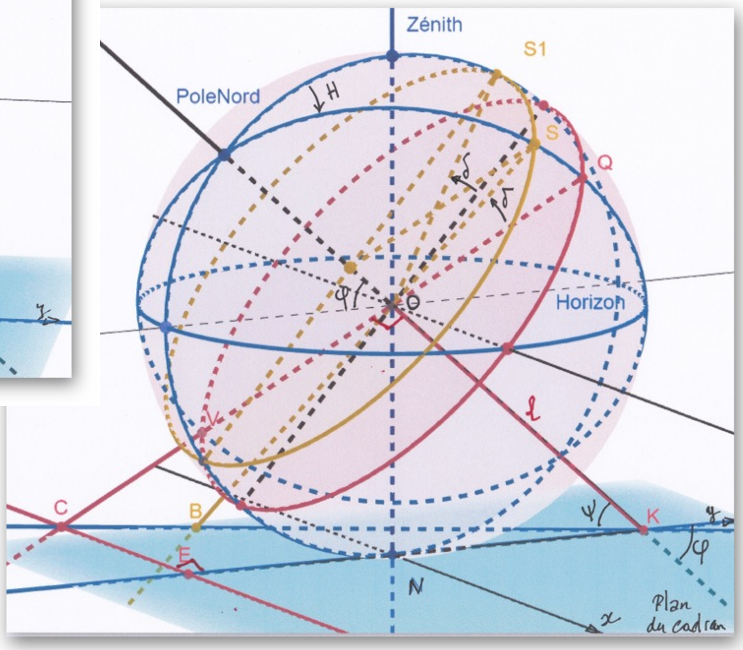
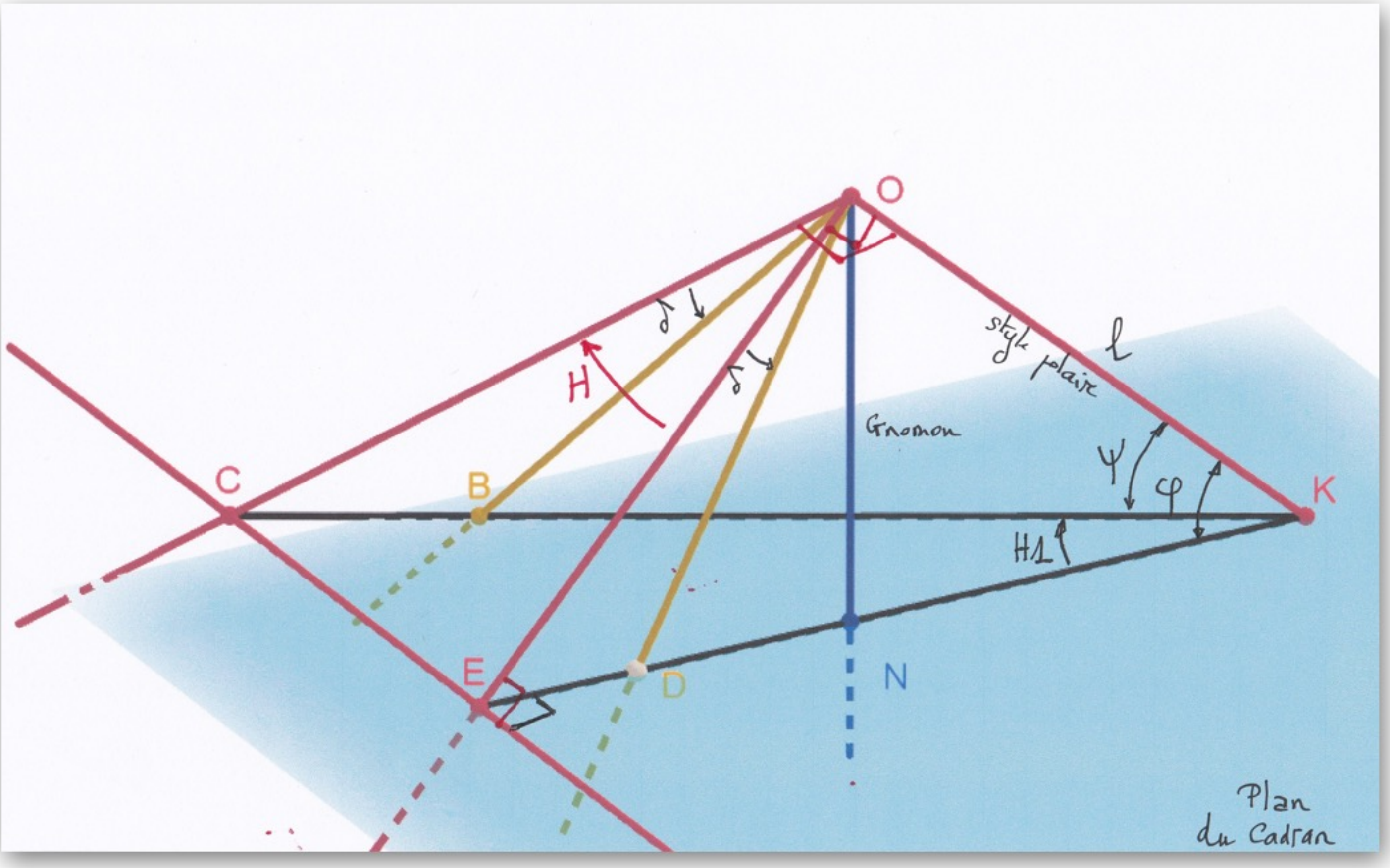


Figure 2

Figure 3



Pierre-Louis Cambefort pierre-louis.cambefort@orange.fr est ingénieur, artiste et gnomoniste. Un portrait détaillé lui a été consacré dans le numéro 1 du magazine.