

# LE CADRAN CYLINDRIQUE DE HAUTEUR DE GEORG BRENTEL

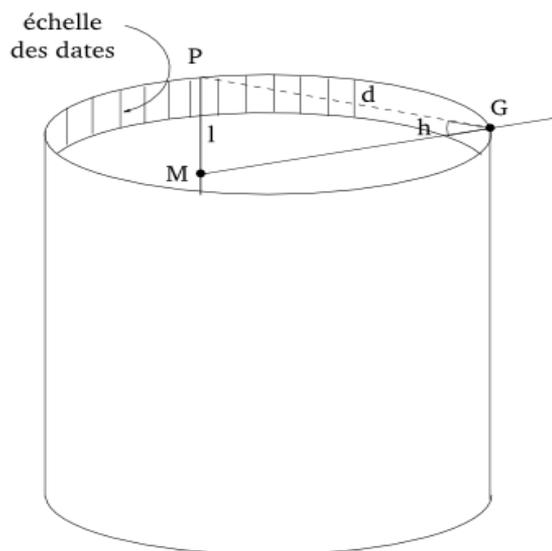
Henri Gagnaire et Paul Gagnaire

Ce cadran est simple à comprendre et à construire (un cylindre et une perle), et a été imaginé il y a plus de quatre siècles par un peintre et gnomoniste souabe, Georg Brentel le Jeune. Quant au tracé des courbes horaires, les auteurs vous accompagnent pas à pas dans leur compréhension.

## DESCRIPTION DU CADRAN

Ce cadran (le *cylinder solaris concavus* imaginé par Georg Brentel en 1615) est constitué d'un cylindre vertical de section circulaire limité par deux plans horizontaux. L'un d'entre eux sert de base au cylindre.

Une petite perle G, posée sur le bord supérieur horizontal du cylindre, est l'objet « porte ombre ». Son ombre est projetée sur la surface intérieure concave du cylindre. Elle donne l'heure grâce à un réseau de courbes tracées sur un papier enroulé à l'intérieur du cylindre.



Le long du bord supérieur du papier (axe horizontal) est tracée « l'échelle des dates ». Celle-ci peut être choisie de manière arbitraire. Ainsi, à chaque génératrice du cylindre (axe vertical sur le papier) correspond une date (ou une déclinaison du Soleil).

Le cadran doit être orienté vers le Soleil de telle manière que l'ombre de la perle tombe sur la génératrice intérieure du cylindre correspondant à la date de la mesure.

La position de l'ombre M de la perle G sur la génératrice du cylindre est mesurée par la longueur  $l = PM$  donnée par la relation 1 suivante :

$$l = d \tan h$$

où d est la distance GP entre la perle et la génératrice du cylindre.

Or, la hauteur h du Soleil dépend, pour une latitude  $\varphi$  donnée, de la déclinaison  $\delta$  du Soleil et de l'heure solaire H. Elle est donnée par la relation 2 suivante :

$$\sin h = \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos H + \sin \varphi \cdot \sin \delta$$

Il sera donc facile de tracer des marques horaires tout au long de la génératrice du cylindre correspondant à une date donnée.

## CHOIX DE L'ÉCHELLE DES DATES

L'année peut être divisée en 36 décans. Les dates retenues sont celles indiquées dans le tableau ci-dessous.

À une déclinaison du Soleil, correspondent deux dates. On peut donc « replier » l'échelle des dates qui ne contient ainsi que 18 cases.

Ces 18 cases ne peuvent pas occuper toute la périphérie du cylindre. En effet, la distance d ne doit pas être trop faible et en aucun cas être nulle.

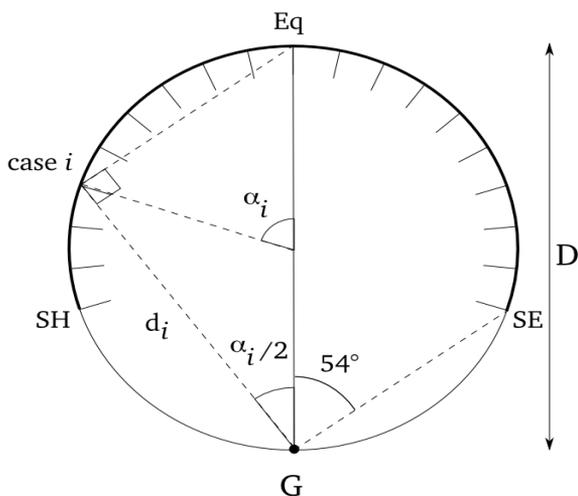
On peut choisir arbitrairement la longueur de l'échelle des dates. Celle-ci peut ne représenter que 60% de la périphérie totale du cylindre soit un angle au centre de  $216^\circ$ . Chacune des 18 cases de l'échelle n'occupe alors qu'un secteur angulaire égal à  $12^\circ$ .

La case centrale, correspondant aux dates voisines des équinoxes, est placée de façon à être diamétralement opposée à la perle.

Dates	Déclinaisons (° décimaux)	Déclinaisons moyennes (°)
21 déc	-23,43	-23,43
01 janv – 11 déc	-22,98 / -23,02	-23,00
11 janv – 01 déc	-21,78 / -21,85	-21,82
21 janv – 21 nov	-19,88 / -20	-19,94
01 fév – 11 nov	-17,07 / -17,52	-17,30
11 fév – 01 nov	-13,98 / -14,55	-14,27
21 fév – 21 oct	-10,52 / -10,83	-10,67
01 mars – 11 oct	-7,43 / -7,17	-7,30
11 mars – 01 oct	-3,57 / -3,33	-3,45
21 mars – 21 sept	0,38 / 0,55	0,46
01 avril – 11 sept	4,68 / 4,42	4,55
11 avril – 01 sept	8,45 / 8,13	8,29
21 avril – 21 août	11,98 / 11,98	11,98
01 mai – 11 août	15,20 / 15,15	15,17
11 mai – 01 août	17,98 / 17,92	17,95
21 mai – 21 juillet	20,27 / 20,38	20,32
01 juin – 11 juil	22,10 / 22,05	22,07
11 juin – 01 juil	23,10 / 23,08	23,09
21 juin	23,43	23,43

La figure ci-dessous montre une vue de dessus du cylindre. À la case numérotée  $i$ , correspond une déclinaison  $\delta_i$  et une distance  $d_i$  à la perle égale à (relation 3):

$$d_i = D \cdot \cos(\alpha_i / 2)$$

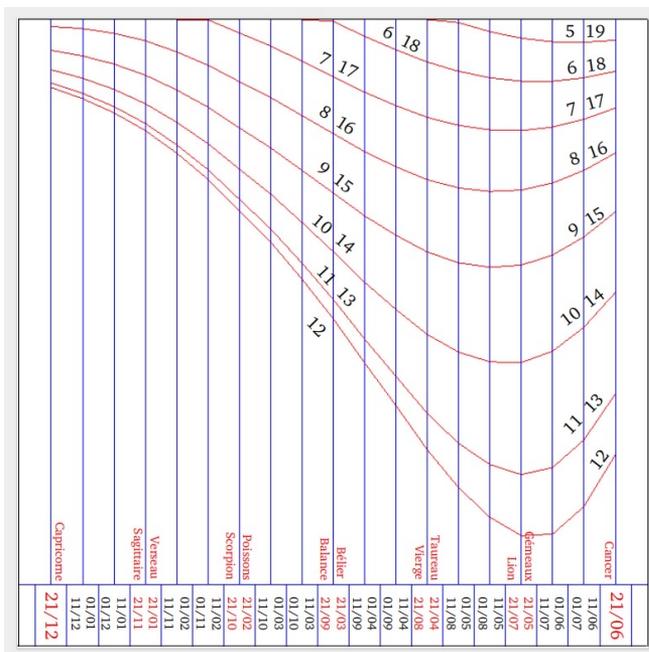


#### CALCUL DU RÉSEAU DE COURBES

Pour chaque déclinaison  $\delta_i$ , on doit calculer :

- la valeur de  $x_i = D \cdot \alpha_i / 2$  de chaque case sur le développé (déterminée par le choix de l'échelle des dates),
- la valeur de  $d_i$  à l'aide de la relation 3,
- les hauteurs  $h_{ij}$  correspondant aux différentes heures  $H_{ij}$  où le Soleil est au-dessus de l'horizon à l'aide de la relation 2,
- les différentes longueurs  $l_{ij}$  correspondant aux différentes heures à l'aide de la relation 1.

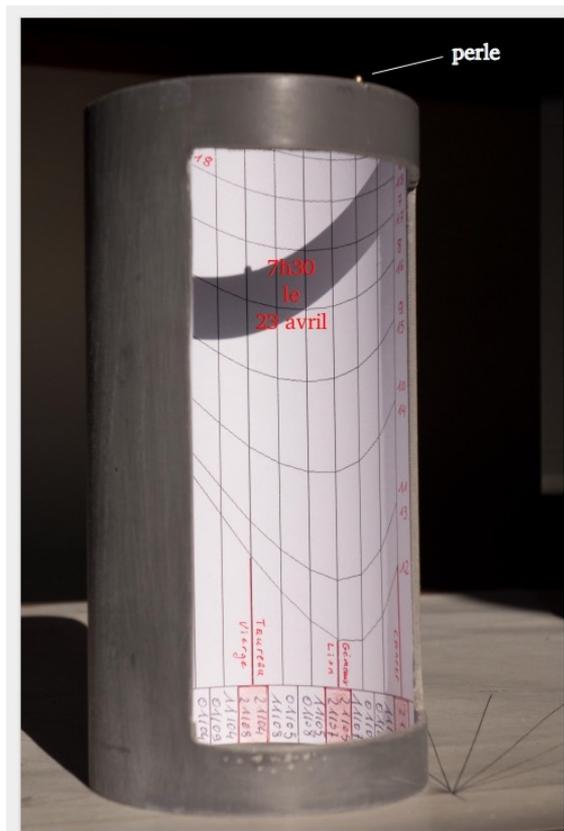
On obtient ainsi le diagramme montré sur la figure ci-dessous.



On constate que l'ombre pénètre au maximum dans le cylindre pour midi solaire mais pas au solstice d'été. Ce résultat peut paraître surprenant mais s'explique très facilement.

En effet, la distance entre la perle et la paroi du cylindre varie avec la déclinaison. La hauteur du Soleil à midi est moindre au 21/05 ou au 21/07 ( $h = 65^\circ$  et  $\tan h = 2,14$ ) que lors du solstice d'été ( $h = 68^\circ$  et  $\tan h = 2,47$ ) mais la distance entre la perle et la paroi est plus importante pour ces deux dates ( $d = D \cdot \cos 36^\circ = 0,81 D$ ) que pour le solstice d'été (où d'ailleurs elle est la plus faible de toutes ( $d = D \cdot \cos 54^\circ = 0,59 D$ )).

Ci-dessous le prototype réalisé pour lequel on a découpé une fenêtre dans le cylindre pour une meilleure lecture. Cette fenêtre a permis de placer l'échelle des dates au bas du diagramme.



Cet article est une synthèse, préparée pour ce magazine, d'articles plus approfondis déjà parus, notamment dans le n°36 de Cadran-Info, qui peut être téléchargé depuis <https://ccs.saf-astronomie.fr/cadran-info/>

Professeur de physique à l'université de Saint-Étienne, Henri Gagnaire [henrigagnaire@gmail.com](mailto:henrigagnaire@gmail.com) n'a découvert et ne s'est passionné pour la gnomonique qu'après sa retraite.

Paul Gagnaire, lui, est l'un des plus éminents gnomonistes français, auteur de très nombreuses publications notamment dans la revue Cadran Info (<https://ccs.saf-astronomie.fr/cadran-info/>).